GLAVA 1

METRIČKA I TOPOLOŠKA STRUKTURA PROSTORA $\mathbb{R}^n$

U tekstu sa $\mathbb{R}$ označavamo uobičajeno skup realnih brojeva, dok sa $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ označavamo Dekartov proizvod od $n-$kopija skupa $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Uređenu $n-$torku $(x_1, ..., x_n)$ označavaćemo jednim slovom $x = (x_1, ..., x_n)$ i nazivati tačkom skupa $\mathbb{R}^n$.

Kao što je poznato na skupu $\mathbb{R}^n$ moguće je definisati unutrašnju operaciju sabiranja ("po koordinatama") elemenata iz $\mathbb{R}^n$, tj.

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

Takođe, posmatrajući skup $\mathbb{R}^n$ i vezano polje skalara $\mathbb{R}$ definisana je spoljašnja operacija množenja skalara iz $\mathbb{R}$ i elemenata skupa $\mathbb{R}^n$,

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

na način

$$\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Lako se provjerava da za ovako definisane operacije uređena četvorka $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Dakle, u skladu sa posljednjim određenjem skupa $\mathbb{R}^n$ njegove elemente takođe tretiramo kao vektore, tj. elemente prethodno navedenog vektorskog prostora.

1. Metrički prostor

Prisjetimo se da svojstvo konvergencije niza realnih brojeva $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ka realnom broju $a \in \mathbb{R}$ možemo kratko da zapišemo na način

$$\lim_{n \to \infty} |a - a_n| = 0.$$

Geometrijski interpretirano niz rastojanja tačaka a_n od tačke a teži nuli kada $n \to \infty$. Ispostavlja se da je pojam rastojanja ključni u definisanju konvergencije niza i kao takav biće osnov za uvođenje jedne uopštene klase prostora kod kojih će postojanje funkcije rastojanja ili metrike biti njihovo glavno određenje.

U narednoj definiciji navodimo aksiome metričkog prostora.

Definicija 1.1. Neka je $X \neq \emptyset$ i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(1) $d(x,y) \geq 0$ (*nenegativnost ili aksioma razdvajanja*);

(2) $d(x,y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$; (*aksioma koincidencije*);

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ (*simetričnost*);

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (*nejednakost trougla*),

gdje su x, y, z proizvoljni elementi skupa X. Tada se funkcija d naziva *metrikom* (ili rastojanjem) na skupu X. Uređen par (X,d) se naziva *metričkim prostorom.*

Primijetimo da u samoj Definiciji 1.1 na skupu X nije pretpostavljeno postojanje određene strukture. Njegove elementa i dalje tretiramo kao tačke za koje smo sada u prilici da odredimo odgovarajuće rastojanje. Takođe na istom skupu moguće je definisati više metrika.

Same aksiome metrike $(1)-(4)$ iz prethodne definicije odgovaraju našoj geometrijskoj intuiciji, u smislu da je rastojanje između bilo koje dvije različite tačke pozitivno kao i da rastojanje između tačaka x i y nije veće nego suma rastojanja između tačaka x i z i rastojanja između tačaka z i y.

Uslov (1) je moguće izvesti iz uslova (2),(3) i (4). Zaista,

$$2d(x,y) = d(x,y) + d(y,x) \geq d(x,x) = 0,$$

odakle dobijamo da je $d(x,y) \geq 0$ za proizvoljne elemente metričkog prostora X.

Prije nego pređemo na primjere metričkih prostora izvedimo jednu važnu nejednakost za metriku. Ukoliko je (X,d) metrički prostor, tada važi sljedeća nejednakost

$$|d(z,x) - d(z,y)| \leq d(x,y). \tag{1.1}$$

Naime, uslovi (4) i (3) povlače $d(z,x) \leq d(z,y) + d(x,y)$, tj.

$$d(z,x) - d(z,y) \leq d(x,y).$$

Slično, $d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y)$, tj. $d(z,y) - d(z,x) \leq d(x,y)$, odnosno

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq \max\{d(z,x) - d(z,y), d(z,y) - d(z,x)\} \\ &= |d(z,x) - d(z,y)|. \end{aligned}$$

Primjer 1.2. Osnovni primjer, poznat iz prethodnog kursa analize, jeste metrički prostor $(\mathbb{R}, d)$, gdje je metrika $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisana sa $d(x,y) = |x - y|$.

Da je funkcija d zaista metrika pokazujemo jednostavno. Nejednakost trougla dokazujemo koristeći istoimeno svojstvo za funkciju apsolutne vrijednosti,

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y).$$

PRIMJER 1.3. Na proizvoljnom skupu $X \neq \emptyset$ možemo da definišemo tzv. diskretnu metriku

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Lako se provjerava da je (X, d) metrički prostor. Na primjer, u cilju da pokažemo nejednakost trougla

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

primijetimo da lijeva strana poslednje nejednakosti može da uzima vrijednosti 0 ili 1, dok za desnu stranu nejednakosti potencijalne vrije– dnosti su $0, 1$ ili 2. Dakle, nejednakost trougla nije tačna samo u slučaju da je $d(x,y) = 1$, tj. $x \neq y$ i $d(x,z) + d(z,y) = 0$, tj. $x = z$ i $y = z$ što je nemoguće.

PRIMJER 1.4. (**Euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$**) Na skupu $\mathbb{R}^n$ definišemo metriku funkcijom

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}, \tag{1.2}$$

$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1 ..., y_n)$, koja specijalno za $n = 1$ daje metriku iz Primjera 1.2.

Nije teško provjeriti da važe svojstva (1), (2) i (3) iz Definicije 1.1. U svrhu dokazivanja nejednakosti trougla za funkciju d_2 koristimo specijalan slučaj nejednakosti Minkovskog,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Za slučaj da je $n = 2$ i $n = 3$ formulom je dato upravo najkraće rastojanje između tačaka x i y u ravni i prostoru $\mathbb{R}^3$, tj. euklidsko rastojanje.

Da bismo upotpunili gornja izvođenja, dokažimo specijalan slučaj nejednakosti Minkovskog polazeći od jednostavne nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, a, b \geq 0.$$

Stavljajući da je $a = \frac{|a_i|}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}}$ i $b = \frac{|b_i|}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}}$ i zatim sumirajući novodobijene nejednakosti za $i = 1, ..., n$ dobijamo

$$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i||b_i|}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

tj. dolazimo do Koši-Švarcove nejednakosti

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Sada specijalno imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(|a_i| + |b_i|)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right)^2,\end{aligned}$$

tj.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i| + ||b_i|)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Primjer 1.5. Na skupu $\mathbb{R}^n$ sljedeće funkcije

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

čine metrike (provjeriti).

Ukoliko je (X,d) metrički prostor i $A \subset X$, tada sam skup A možemo sa restrikcijom metrike d na njemu da tretiramo kao metrički prostor za sebe, tj. rekli bismo da je (A,d) metrički potprostor prostora (X,d).

U narednim definicijama uvodimo određene pojmove koje je moguće definisati u proizvoljnom metričkom prostoru poput dijametra skupa, ograničenog skupa i rastojanja između skupova.

Definicija 1.6. Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subset X$, tada dijametar skupa A, u oznaci diam(A) je definisan

$$\mathrm{diam(A)} = \sup_{x,y\in A} d(x,y).$$

Definicija 1.7. Neka je (X,d) metrički prostor za skup $A \subseteq X$ kažemo da je ograničen ako je $\mathrm{diam}(A) < \infty$.

Primjer 1.8. Neka je $A = \{(x,y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ disk ili krug sa centrom u tački $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ i poluprečnika $r > 0$, tada je jasno $\mathrm{diam}(A) = 2r$ uzimajući u obzir metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Primjer 1.9. Neka je $I_{a,b} = \{(x,y,z)|a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$, gdje su $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$ fiksirane tačke iz $\mathbb{R}^3$ ($a_i < b_i, i \in \{1,2,3\}$). Skup $I_{a,b}$ predstavlja pravougli paralelo–piped i traženi dijametar jednak je upravo dužini velike dijagonale koja spaja tačke a i b. Dakle,

$$\operatorname{diam}(I_{a,b}) = \left((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2\right)^{1/2}.$$

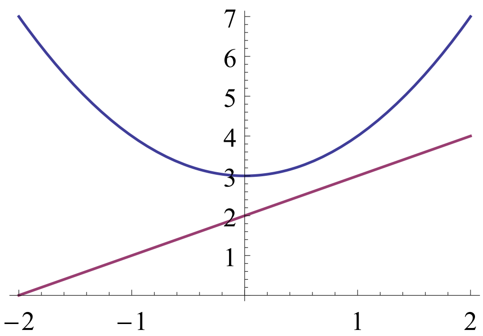
Definicija 1.10. Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subset X$ i $B \subset X$, tada rastojanje između skupova A i B u metričkom prostoru X je dato sa

$$\mathrm{d}(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y).$$

U manje preciznoj formi rekli bismo da je rastojanje između dva skupa najkraće rastojanje između tih skupova. Jasno da ako za skupove A i B iz prethodne definicije važi $A \cap B \neq \emptyset$, onda je $\mathrm{d}(A,B) = 0$.

Primjer 1.11. Odredimo rastojanje između prave $y = x + 2$ i grafika funkcije $y = x^2 + 3$. Tražimo $\mathrm{d}(A,B)$, gdje je $A = \{(x,y)|y = x + 2, x \in \mathbb{R}\}$ i $B = \{(x,y)|y = x^2 + 3, x \in \mathbb{R}\}$ (slika).

Traženo rastojanje možemo da odredimo koristeći formulu za rastojanje tačke od prave. Preciznije, od svih tačaka skupa B tražimo onu za koju funkcija $\varphi(x) = \frac{|x^2-x+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$, ima najmanju vrijednost za $x \in \mathbb{R}$. Budući da je $x^2 - x + 1 \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, lako se dobija da se odgovarajući minimum dostiže u tački $x = \frac{1}{2}$ i zato je $\mathrm{d}(A,B) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.



Primjer 1.12. Na skupu neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$, $C([a,b])$ definišemo $d_\infty(f,g) = \max_{a\leq t\leq b} |f(t)-g(t)|$, za $f,g \in C([a,b])$.

Funkcija $d_\infty : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ je dobro definisana. Naime, kako je za proizvoljne $f,g \in C([a,b])$ funkcija $\varphi(t) = |f(t)-g(t)|$ takođe neprekidna, to ona dostiže maksimum na segmentu $[a,b]$.

Iz načina na koji je definisana funkcija d_∞ jasno da je $d(f,g) \geq 0$ i $d_\infty(f,g) = d(g,f)$. Sa druge strane, ako je $d_\infty(f,g) = 0$, to povlači da je maksimum nenegativne funkcije $\varphi(t) = |f(t) - g(t)|$ nula na segmentu $[a,b]$, pa je $\varphi(t) = 0$, $t \in [a,b]$, tj. $f(t) = g(t), t \in [a,b]$. Na kraju, nejednakost trougla dokazujemo iz činjenice da

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|, t \in [a,b], \tag{1.3}$$

gdje je $h \in C([a,b])$. Uzumajući maksimum obje strane nejednakosti u (1.3) dobijamo

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \max_{a\le t\le b} |f(t)-g(t)| \\ &\le \max_{a\le t\le b} (|f(t)-g(t)| + |h(t)-g(t)|) \\ &\le \max_{a\le t\le b} (|f(t)-g(t)|) + \max_{a\le t\le b} (|h(t)-g(t)|) \\ &= d_\infty(f,g) + d_\infty(h,g). \end{aligned}$$

1.1. Normirani prostori. Pojam normiranog prostora je već poznat iz kursa Linearne algebre i za razliku od metričkog prostora na skupu gdje definišemo normu pretpostavljamo postojanje određene algebarske strukture, tj. strukturu vektorskog prostora. U nastavku pokazujemo da je svaki normiran prostor metrički prostor i prethodno navedene primjere metričkih prostora razmatramo kroz prizmu uvedene definicije normiranog prostora.

DEFINICIJA 1.13. Neka je X vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. Funkcija $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(1) $\|x\| \ge 0$;
(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \lambda \in \mathbb{R}$;
(4) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, za $x, y \in X$,

naziva se *normom* na prostoru X. Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ naziva se *normiranim prostorom.*

TEOREMA 1.14. *Svaki normiran prostor X je metrički prostor.*

DOKAZ. Neka je $(X, \|\cdot\|)$ dati normirani prostor. Definišimo funkciju $d : X\times X \to \mathbb{R}$ na način $d(x,y) = \|x-y\|$. Lako se utvrđuje da funkcija d zadovoljava sve uslove metrike iz Definicije 1.1. Primjera radi, za nejednakost trougla imamo

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\|+\|z-y\| = d(x,z)+d(z,y),$$

gdje $x, y, z \in X$. □

KOMENTAR 1.15. Za metriku $d(x,y) = \|x-y\|$ normiranog prostora $(X, \|\cdot\|)$ kažemo da je indukovana (generisana) normom $\|\cdot\|$. Na taj način, svaki normiran prostor možemo da tretiramo istovremeno i kao odgovarajući metrički prostor gdje je metrika indukovana normom polazećeg normiranog prostora.

PRIMJER 1.16. Apsolutna vrijednost $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je primjer norme na vektorskom prostoru $\mathbb{R}$, gdje se $\mathbb{R}$ posmatra kao vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Prema tome, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ predstavlja normiran prostora. Jasno da metrika definisana na $\mathbb{R}$ iz Primjera 1.2 je indukovana normom $|\cdot|$.

Primjer 1.17. (**Euklidski prostor** $\mathbb{R}^n$) Na skupu $\mathbb{R}^n$ funkcijom $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ zadata je norma. Posljednje tvrđenje se lako dokazuje imajući u vidu da je na primjer nejednakost trougla specijalan slučaj nejednakosti Minkovskog dokazanoj u Primjeru 1.4. Takođe, euklidska metrika d_2 iz istog primjera je generisana upravo definisanom normom.

Uzimajući u obzir da je sada $\|x\| = d_2(0,x)$, nejednakost (1.1) postaje

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|. \tag{1.4}$$

Primjer 1.18. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ sa

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|, x \in \mathbb{R}^n,$$

definisane su odgovarajuće norme. Primijetimo da su metrike d_1, d_∞ iz Primjera 1.5 indukovane normama $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ respektivno.

Definicija 1.19. Neka je X vektorski prostor. Za norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ definisane na X kažemo da su ravnomjerno ekvivalentne ako postoje pozitivne konstane C_1 i C_2 takve da važi

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|, x \in X.$$

U terminima definisanih normi $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ na $\mathbb{R}^n$ važe sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq & \quad \|x\| & \leq \|x\|_1, x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\|_\infty \leq & \quad \|x\| & \leq n\|x\|_\infty, x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\|_\infty \leq & \quad \|x\|_1 & \leq n\|x\|_\infty, x \in \mathbb{R}^n \ \text{(provjeriti)}. \end{aligned}$$

Iz gore navedenih nejednakosti zaključujemo da su norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|$ ravnomjerno ekvivalentne u parovima na $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.20. Na prostoru $C([a,b])$ neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$ sa

$$\|f\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b} |f(t)|, f \in C([a,b])$$

definisana je norma na $C([a,b])$, tj. $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ je normiran prostor i metrika d_∞ iz Primjera 1.11 je generisana normom $\|\cdot\|_\infty$.

Primjer 1.21. Na prostoru $C([a,b])$ definišemo funkciju $\|\cdot\|_1$ na način

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt, f \in C([a,b]).$$

Funkcija $\|\cdot\|_1$ je dobro definisana na prostoru neprekidnih funkcija $C([a,b])$ budući da je svaka neprekidna funkcija na segmentu takođe i Riman integrabilna.

Nije teško provjeriti da funkcija $\|\cdot\|_1$ zadovoljava uslove (1), (3) i (4).

Sa druge strane, ako je $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt = 0$, onda budući da je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$, to je $f(t) = 0$, $t \in [a,b]$. U protivnom, ako je $\|f\|_1 = 0$ i $f(t_0) \neq 0$ za neko $t_0 \in [a,b]$, to postoji interval $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ takav da je $|f(t)| > 0$, $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap [a,b]$ i zato je

$$\|f\|_1 > \frac{\epsilon}{2} \min_{t \in [t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0 + \frac{\epsilon}{2}] \cap [a,b]} |f(t)| > 0,$$

što je kontradikcija. Prema tome, $\|\cdot\|_1$ je takođe primjer norme na prostoru $C([a,b])$. Dodatno, odgovarajuća metrika na prostoru $C([a,b])$ indukovana normom $\|\cdot\|_1$ data je formulom

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt, f, g \in C([a,b]).$$

Primjer 1.22. Označimo sa $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ skup svih linearnih preslikavanja iz prostora $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, tj. skup svih preslikavanja koja zadovoljavaju $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$\Lambda(x + y) = \Lambda(x) + \Lambda(y), \;\; x, y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Lambda(\lambda x) = \lambda\Lambda(x), x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Na skupu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ standardno definišemo sabiranje i množenje skalarom,

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x), \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(\lambda\Lambda)(x) = \lambda\Lambda(x), \Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sa gore navedenim operacijama uređena četvorka $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \mathbb{R}, +, \cdot)$ čini vektorski prostor. Ulogu nultog elementa igra nulto preslikavanje $\Lambda(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dalje, neka je

$$\|\Lambda\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda(x)\|}{\|x\|}, \;\; \Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m). \tag{1.5}$$

Na nivou oznaka primijetimo da je u brojiocu razlomka u (1.5) euklidska norma vektora Λx u $\mathbb{R}^m$, a u imeniocu euklidska norma vektora x u $\mathbb{R}^n$. Takođe, zbog linearnosti preslikavanja Λ za proizvoljno $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda(\alpha x)\|}{\|\alpha x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda(x)\|}{\|x\|}$$

i dodatno je

$$\|\Lambda\| = \sup_{x \neq 0} \left\| \Lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Lambda(x)\|.$$

Iz (1.5) vidimo da ako je $\|\Lambda\| < \infty$, onda je

$$\|\Lambda(x)\| \leq \|\Lambda\|\|x\|, \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Za linerana preslikavanja iz skupa $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ za koje je $\|\Lambda\| < \infty$ kažemo da su ograničena linearna preslikavnja.

Funkcija $\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ $(\Lambda \to \|\Lambda\|)$ je norma na prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Na primjer provjerimo svojstvo (2) iz Definicije 1.27. Ako je $\|\Lambda\| = 0$, onda je $\sup_{\|x\|=1} \|\Lambda(x)\| = 0$, tj. $\Lambda(x) = 0, \|x\| = 1$, što dalje ima za posljedicu da $\Lambda(x) = \|x\|\Lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$ kad god je $x \neq 0$, tj. $\Lambda(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dalje, u cilju da ustanovimo validnost svojstva (4) pretpostavimo da su $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i $\|\Lambda_1\| < \infty$ i $\|\Lambda_2\| < \infty$. U protivnom, ako je $\|\Lambda_1\| = \infty$ ili $\|\Lambda_2\| = \infty$, onda je (4) trivijalno. Za $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i $\|x\| = 1$, imamo

$$\|\Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)\| \leq \|\Lambda_1(x)\| + \|\Lambda_2(x)\|.$$

Uzimajući supremum po skupu $\{x | \|x\| = 1\}$ lijeve i desne strane gornje nejednakosti dolazimo do

$$\|\Lambda_1 + \Lambda_2\| \leq \|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\|.$$

Ako su $\Lambda_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ $(m, n, p \in \mathbb{N})$ ograničena linearna preslikavanja, onda je i kompozicija ovih preslikavanja $\Lambda_2 \circ \Lambda_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ takođe ograničeno linearno preslikavanje.

Posljednji tvrđenje lako dokazujemo iz sledećeg niza relacija

$$\|(\Lambda_2 \circ \Lambda_1)(x)\| = \|\Lambda_2(\Lambda_1(x))\| \leq \|\Lambda_2\|\|\Lambda_1(x)\| \leq \|\Lambda_2\|\|\Lambda_1\|\|x\|,$$

tj. $\|\Lambda_2 \circ \Lambda_1\| \leq \|\Lambda_2\|\|\Lambda_1\|$.

Primjer 1.23. Sa $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, ..., \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$ označavamo skup svih polilinearnih preslikavanja $P : \mathbb{R}^{k_1} \times ... \times \mathbb{R}^{k_n} \to \mathbb{R}$, gdje $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$ su prirodni brojevi. Podsjetimo se da za preslikavanje kažemo da je polilinearno ako je linearno po svakom argumentu. Specijalno za $n = 2$ govorimo o bilinearnim preslikavanjima.

Skup $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, ..., \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$ sa standardnim operacijama sabiranja funkcija i množenja skalarom čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Za proizvoljno $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, ..., \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$ funkcija

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, ..., \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

definisana na način

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup_{x_i \neq 0, \ 1 \leq i \leq n} \frac{|P(x_1, ..., x_n)|}{\|x_1\|_1 \cdots \|x_n\|_n} \\ &= \sup_{\|x_i\|_i = 1, \ 1 \leq i \leq n} |P(x_1, ..., x_n)| \end{aligned} \tag{1.7}$$

je norma na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, ..., \mathbb{R}^{k_n}, \mathbb{R})$, gdje sa $\|\cdot\|_i$ označavamo euklidsku normu na prostoru $\mathbb{R}^{n_i}$.

Ukoliko je $\|P\| < \infty$, za polilinearno preslikavanje P kažemo da je ograničeno.

Napomena 1.24. Polilinearno preslikavanje $P : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ definisano je u opštem na Dekartovom proizvodu $X_1 \times \cdots \times X_n$ vektorskih prostora X_i, $i \in \{1, ..., n\}$, nad istim poljem, koji preslikava u vektorski prostor Y.

1.2. Euklidov prostor. Slično kao u prethodnom izlaganju pretpostavljamo da je X realan vektorski prostor, iako sama definicija normiranog prostora (kao i Euklidovog prostora) daje se i za slučaj vektorskog prostora nad poljem kompleksnih brojeva.

Definicija 1.25. Euklidov prostor X je vektorski prostor na kome je definisano preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava sljedeće uslove

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \langle x, x\rangle \geq 0, x \in X;\\
&(2)\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;\\
&(3)\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, x, y \in X;\\
&(4)\ \langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle, \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in X;\\
&(5)\ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, x, y, z \in X.
\end{aligned}
$$

Funkciju $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazivamo *skalarnim proizvodom* na X.

Uočimo da u Definiciji 1.25 nije pretpostavljeno da je vektorski prostor X konačno dimenzionalan. Slično kao i za normirane prostore, moguće je definisati više skalarnih proizvoda na istom vektorskom prostoru.

Prethodno dokazana Koši-Švarcova nejednakost u kontekstu prostora $\mathbb{R}^n$ važi u opštijoj situaciji. Preciznije, za proizvoljne vektore x, y iz Euklidovog prostora X važi nejednakost

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{1.8}$$

Primjer 1.26. Kanonski primjer Euklidovog prostora je prostor $\mathbb{R}^n$ sa skalarnim proizvodom definisanim na način

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.9}$$

Teorema 1.27. *Svaki Euklidov prostor X je normiran prostor.*

Dokaz. Potrebno je da ustanovimo da je funkcijom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in X$ definisana norma na X. Dokažimo da važi nejednakost trougla, važenje ostalih svojstava norme se lako utvrđuje. Polazeći od Koši-Švarcove nejednakosti (1.8) imamo

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

tj. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. □

Dakle, novi aspekt posmatranja (ujedno i opravdanje termina "euklidski prostor $\mathbb{R}^n$") prostora $\mathbb{R}^n$ jeste da je to normiran prostor gdje je norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{1.10}$$

indukovana skalarnim proizvodom (1.9).

Euklidov prostor $\mathbb{R}^n$ sa skalarnim proizvodom (1.9) koji indukuje odgovarajuću euklidsku normu (1.10) (metriku d_2) predstavlja osnovno polje rada u daljem izlaganju. U tom smislu, često u određenim situacijama nećemo praviti razliku između norme (1.10) i metrike d_2 **koju ćemo nadalje da označavamo sa** d.

Na kraju ovog poglavlja navodimo primjer skalarnog proizvoda na beskonačno dimenzionalnom prostoru $C([a,b])$.

Primjer 1.28. Formulom

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, f,g \in C([a,b])$$

definisan je skalarni proizvod na $C([a,b])$ što se lako provjerava.

Polazeći od Teoreme 1.27 imamo da je na $C([a,b])$ norma indukovana gore definisanim skalarnim proizvodom data formulom

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad f \in C([a,b]),$$

a metrika

$$\tilde{d}_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad f,g \in C([a,b]).$$

Koši-Švarcova nejednakost za $f,g \in C([a,b])$ poprima sljedeći oblik

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

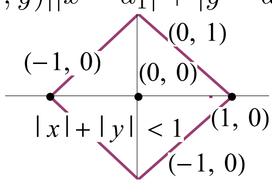
U narednoj definiciji u prostoru $\mathbb{R}^n$ u kontekstu euklidske metrike d definišemo neke standardne geometrijske objekte (otvorena lopta, zatvorena lopta, sfera).

Definicija 1.29. (**Lopta i sfera u** $\mathbb{R}^n$) Neka je $a \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ realan broj. Skupovi $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) < r\}$, $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) \leq r\}$ i $S^{n-1}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) = r\}$ nazivaju se redom *otvorenom loptom*, *zatvorenom loptom* i *sferom* sa centrom u a poluprečnika r.

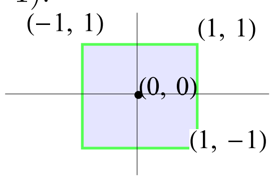
Komentar 1.30. Svaki od pomenutih skupova može biti definisan u proizvoljnom metričkom prostoru.

Primijetimo da za $n = 2$ otvorena lopta $B(a,r)$ ($S^1(a,r)$) iz prethodne definiciji jeste zapravo krug (kružnica) sa centrom u tački a i poluprečnika $r > 0$, dok za $n = 3$ radi se upravo o lopti (sferi) sa centrom u tački a poluptečnika r (slika). Specijalno za $n = 1$, $B(a,r) = (a-r, a+r)$, $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$, a $S^0 = \{a-r, a+r\}$.

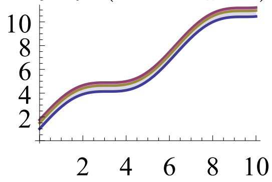
Sam naziv otvorena lopta i njegova korespondencija sa našom geometrijskom intuicijom je uslovan. Na primjer, za $n = 2$ posmatramo odgovarajuće otvorene lopte $B(a,r)$ u slučaju da tretiramo metrike d_1 i d_∞, koje su sada definisane na sljedeći način respektivno $B(a,r) = \{(x,y) | |x-a_1| + |y-a_2| < r\}$ (slika za $a = 0$ i $r = 1$)



i $B(a,r) = \{(x,y) | \max\{|x-a_1|, |y-a_2|\} < r\}$ (slika za $a = 0$ i $r = 1$).



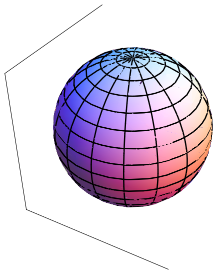
U slučaju da razmatramo prostor $C([a,b])$ i metriku d_∞ iz Primjera 1.12. za $f \in C([a,b])$ odgovarajuća otvorena lopta je definisana sada na način $B(f,r) = \{g \in C([a,b]) | \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| < r\}$. Primijetimo da se grafici funkcija $g \in B(f,r)$ nalaze u traci "širine" $2r$ grafika funkcije f (slika ispod).



1.3. Topološka struktura prostora $\mathbb{R}^n$.

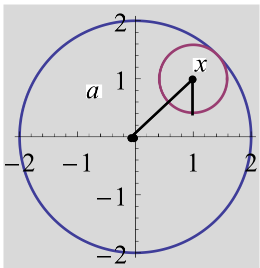
Definicija 1.31. Za skup $G \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je *otvoren* ako za svako $x \in G$ postoji $\delta > 0$ tako da je lopta $B(x,r) \subset G$.

DEFINICIJA 1.32. Okolina tačke $x \in \mathbb{R}^n$ je bilo koji otvoren skup G koji sadrži tačku x. Okolina skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ je bilo koji otvoren skup G u $\mathbb{R}^n$ takav da je $A \subset G$.



PRIMJER 1.33. Otvorena lopta $B(a,r)$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Prema Definiciji 1.31 potrebno je za proizvoljnu tačku $x \in B(a,r)$ pokazati da postoji $\delta > 0$ tako da $B(x,\delta) \subset B(a,r)$. Za $\delta = r - d(x,a)$ (slika) dokazujemo da je $B(x,\delta) \subset B(a,r)$. Zaista, za proizvoljno $y \in B(x,\delta)$ imamo zbog svojstva nejednakosti trougla metrike d da važi

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \delta = r,$$



tj. $B(x,\delta) \subset B(a,r)$.

PRIMJER 1.34. Skup $B^c(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) > r\}$ je otvoren u $\mathbb{R}^n$. Neka je $x \in B^c(a,r)$. Pokažimo da je $B(x,\delta) \subset B^c(a,r)$, gdje je $\delta = d(x,a) - r$. Za $y \in B(x,\delta)$ prema nejednakosti (1.1) imamo da je

$$d(a,y) \geq |d(x,a) - d(x,y)| > d(x,a) - \delta = r,$$

tj. $B(x,\delta) \subset B^c(a,r)$.

TEOREMA 1.35. *a) Skup $\mathbb{R}^n$ i prazan skup $\emptyset$ su otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$.*
b)Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.
c) Presjek konačno mnogo otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.

DOKAZ. a) Da je skup $\mathbb{R}^n$ je otvoren nije teško provjeriti. Sa druge strane, prazan skup $\emptyset$ uzimamo po definiciji da je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.
b) Neka je $\{G_\alpha | \alpha \in I\}$ familija otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$, gdje je I neki skup indeksa. Označimo sa $G = \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$ i neka je $x \in G$. Tada po definiciji unije skupova postoji neki indeks $\alpha_0 \in I$ takav da $x \in G_{\alpha_0}$. Kako je po pretpostavci skup G_{α_0} otvoren to postoji $r > 0$ i lopta

$B(x,r) \subset G_{\alpha_0}$. Tada, $B(x,r) \subset G$, tj. G je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.
c) Neka su $G_i, i \in \{1, ..., m\}$, otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$ i $G = \cap_{i=1}^m G_i$. Tada za $x \in G$, važi da je $x \in G_i$ za svako $i \in \{1, ..., m\}$. Kako je svaki od skupova G_i po pretpostavci otvoren, to postoje pozitivni brojevi $r_i > 0, i \in \{1, ..., m\}$ takvi da lopte $B(x, r_i) \subset G_i, i \in \{1, ..., m\}$. Neka je $r = \min_{1 \le i \le m} r_i$. Lopta $B(x,r)$ pripada svakom od skupova $G_i, i \in \{1, ..., m\}$, pa samim tim i skupu G. □

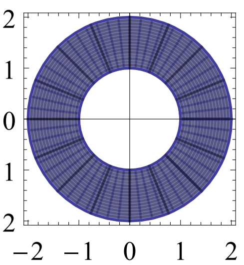
Komentar 1.36. Uslov za konačnost familje otvorenih skupova u c) nije moguće izostaviti. Naime, ukoliko posmatramo familiju intervala $I_k, k \in \mathbb{N}$, gdje je $I_k = (a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}) (b > a)$, koji su jasno otvoreni skupovi u $(\mathbb{R}, d)$, njihov presjek je $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b]$, skup koji nije otvoren u prostoru $(\mathbb{R}, d)$.

Primjer 1.37. Po definiciji dokažimo da je skup $A = \{(x,y) | r_1 < x^2 + y^2 < r_2\}$ $(0 < r_1 < r_2)$ (slika) otvoren skup. Za proizvoljno $x \in A$ i $\delta = \min\{\|x\| - r_1, r_2 - \|x\|\}$ pokažimo da $B(x, \delta) \subset A$. Naime, za $y \in B(x,\delta)$ važi $d(x,y) = \|x - y\| < \delta$, tj. $\|y\| < \|x\| + \delta \le r_2$. Dalje je

$$\|y\| \ge |\|x\| - \|x - y\|| > \|x\| - \delta \ge r_1,$$

tj. $y \in A$.

Na drugi način, primijetimo da je $A = B(0, r_2) \cap B^c(0, r_1)$, tj. A je otvoren skup kao presjek dva otvorena skupa.



Definicija 1.38. Za skup $F, F \subset \mathbb{R}^n$, kažemo da je *zatvoren* u $\mathbb{R}^n$ ako je skup $\mathbb{R}^n \setminus F$ otvoren u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.39. Jednočlan skup $\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ je zatvoren jer $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$.

Primjer 1.40. Segment $[a,b]$ je zatvoren skup u $\mathbb{R}$ jer je $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. U opštijoj situaciji, zatvorena lopta $\overline{B}(a,r)$ je zatvoren skup jer $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a,r) = B^c(a,r)$ je otvoren skup.

Primjer 1.41. Sfera $S^{n-1}(a,r)$ je takođe primjer zatvorenog skupa u $\mathbb{R}^n$ jer $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}(a,r) = B(a,r) \cup B^c(a,r)$.

Naredna teorema predstavlja analog Teoreme 1.35.

Teorema 1.42. *a) Prostor $\mathbb{R}^n$ i $\emptyset$ su zatvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$.*
b) Presjek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ je zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$.

c) Unija konačno mnogo zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ *je zatvoren skup u* $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Dokaz za a) slijedi iz a) Teoreme 1.35. Tvrđenje b) slijedi iz b) Teoreme 1.35 i De Morganovih obrazaca, naime za familiju $\{F_\alpha | \alpha \in I\}$ zatvorenih skupova F_α u $\mathbb{R}^n$, gdje je I neki skup indeksa važi

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha^c.$$

Slično za c) razmatramo konačnu familiju zatvorenih skupova $F_i, 1 \leq i \leq m$, gdje je $m \in \mathbb{N}$ neki fiksiran prirodan broj. Tada

$$\left(\bigcup_{i=1}^m F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^m F_i^c.$$

□

Komentar 1.43. Uslov za konačnost unije zatvorenih skupova u c) nije moguće promijeniti, tj. tvrđenje ne važi za proizvoljnu familu zatvorenih skupova. Na primjer, za familiju zatvorenih intervala $\{I_k | k \in \mathbb{N}\}$, $I_k = [a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k}]$, $(b - a > 2)$ unija $\cup_{k=1}^\infty I_k = (a, b)$ je otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$.

Definicija 1.44. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ i $a \in \mathbb{R}^n$. Tada za tačku a kažemo da je:
1) unutrašnja tačka skupa A ako postoji okolina tačke a koja (zajedno sa a) pripada skupu A. Skup svih unutrašnji tačaka skupa A označavamo sa A° ili $\mathrm{Int}(A)$;
2) spoljašnja tačka skupa A ako je a unutrašnja tačka skupa $\mathbb{R}^n \setminus A$. Skup svih spoljašnjih tačaka skupa A označavamo sa $\mathrm{Ext}(A)$;
3) granična tačka skupa A ako za svaku okolinu tačke a ima neprazan presjek sa A i $\mathbb{R}^n \setminus A$. Skup svih graničnih tačaka skupa A označavamo sa ∂A;
4) tačka nagomilavanja skupa A ako se u svakoj njenoj okolini nalazi beskonačno mnogo tačaka iz A. Skup svih tačaka nagomilavanja (adherentni skup) označavamo sa A';
5) izolovana tačka skupa A ako a pripada A i postoji okolina tačke a u kojoj nema drugih tačaka iz A osim a.

Komentar 1.45. Iz Definicije 1.44 je jasno da je tačka $a \in A$ izolovana ako nije tačka nagomilavanja za skup A. Primijetimo da iz Definicije 1.44 slijedi da je skup $A \subset \mathbb{R}^n$ otvoren ako i samo ako je $A = A^\circ$.

Definicija 1.46. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A označavamo sa $\overline{A}$ i nazivamo zatvaranjem skupa A.

Komentar 1.47. Napomenimo da pojam najmanji skup iz prethodne definicije odnosi se u smislu inkluzije, tj. ako je $F \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren skup takav da je $A \subset F$, onda $\overline{A} \subseteq F$. Drugačije rečeno, $\overline{A}$ je presjek svih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ koji sadrže skup A.

Iz same Definicije 1.46 direktno slijedi naredno tvrđenje.

TEOREMA 1.48. *Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$. Tada skup F je zatvoren ako i samo ako je $F = \overline{F}$.*

TEOREMA 1.49. *Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$. Tada $\overline{F} = F \cup \partial F$.*

DOKAZ. Dokažimo prije svega da je $F \cup \partial F$ zatvoren skup. Pretpostavimo suprotno da za neko $x \in (F \cup \partial F)^c$ ne postoji $r > 0$ tako da $B(x,r) \cap (F \cup \partial F) = \emptyset$, tada za dato $x \in (F \cup \partial F)^c$ i svako $r > 0$ imamo da je

$$(B(x,r) \cap F) \cup (B(x,r) \cap \partial F) \neq \emptyset,$$

tj. $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$ ili $B(x,r) \cap \partial F \neq \emptyset$ za proizvoljno $r > 0$. Bilo koja od posljednjih relacija da je tačna ($B(x,r) \cap \partial F \neq \emptyset$ povlači $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$) imamo da je $x \in \partial F$ što je kontradikcija. Prema tome, za svako $x \in (F \cup \partial F)^c$ postoji $r > 0$ tako da je $B(x,r) \cap (F \cup \partial F) = \emptyset$ odnosno $F \cup \partial F$ je zatvoren skup. Posljedično važi $\overline{F} \subseteq F \cup \partial F$.

Dalje, ako je $x \in (\overline{F})^c$, to postoji $r > 0$ tako da je $B(x,r) \cap \overline{F} = \emptyset$. Posljednja jednakost jasno povlači da je $B(x,r) \cap F = \emptyset$. Sa druge strane, ako bi $B(x,r) \cap \partial F \neq \emptyset$, to znači da neka granična tačka $x_0 \in \partial F$ pripada $B(x,r)$. Kako je $B(x,r)$ okolina za x_0, to je $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$ što je kontradikcija. Dakle, $B(x,r) \cap (F \cup \partial F) = \emptyset$, tj. $(\overline{F})^c \subseteq (F \cup \partial F)^c$ što dalje povlači da je $F \cup \partial F \subseteq \overline{F}$ i u konačnom $\overline{F} = F \cup \partial F$. $\square$

KOMENTAR 1.50. Primijetimo da je $A \cup A' = A \cup \partial A = \bar{A}$, tako i drugi naziv za zatvaranje skupa $\bar{A}$ je adherencija skupa A.

POSLJEDICA 1.51. *Skup $F \subset \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.*

1.4. Topološki prostor. U nastavku navodimo definiciju topološkog prostora čime i opravdavamo naslov ove glave.

DEFINICIJA 1.52. Neka je τ familija podskupova na skupu X pri čemu važi:
1)X i $\emptyset$ pripadaju τ.
2)Proizvoljna unija elemenata iz τ pripada τ.
3)Konačan presjek elemenata iz τ pripada τ.
Tada za uređen par (X, τ) kažemo da je topološki prostor, a familiju τ nazivamo topologijom na X.

U topološkom prostoru X elementi familije τ su otvoreni skupovi, a njihovi komplementi su zatvoreni skupovi. Slično se definišu i ostali pojmovi poput, primjera radi, okoline tačke. Naime, za proizvoljnu tačku $x \in X$, okolina tačke x je svaki element $V \in \tau$ za koji $x \in V$.

Primjer 1.53. Trivijalan primjer topološkog prostora je $X = \emptyset$ i $\tau = \emptyset$. Takođe, za proizvoljan neprazan skup X ukoliko je $\tau = \mathcal{P}(X)$, tj. partitivni skup od X, (X, τ) je takođe primjer topološkog prostora, gdje je data topologija τ u smislu inkluzije najveća moguća na skupu X.

Primjer 1.54. Na skupu $X = \{a, b, c, d, e\}$ sa

$$\tau = \{X, \emptyset, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

zadata je jedna topologija.

Primjer 1.55. Ukoliko je $X = \mathbb{R}^n$ i τ skup svih otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$, onda je na osnovu prethodno navedenih svojstava otvorenih skupova jasno da je par $(\mathbb{R}^n, \tau)$ je topološki prostor. Za topologiju τ kažemo da je prirodna ili standardna topologija na $\mathbb{R}^n$ indukovana (generisana) euklidskom normom.

Napomena 1.56. Kao što je već rečeno na svakom metričkom prostoru $(X, \tilde{d})$ moguće je definisati familiju svih otvorenih podskupova τ koja na taj način daje topološki prostor (X, τ). Za topologiju τ rekli bismo da je **generisana metrikom** $\tilde{d}$.

Da rezimiramo na primjeru $(\mathbb{R}^n, \tau)$, polazeći od skalarnog proizvoda (1.9) na $\mathbb{R}^n$ definišemo euklidsku normu na $\mathbb{R}^n$, zatim na osnovu Teoreme 1.14 imamo da je $(\mathbb{R}^n, d)$ metrički prostor i na kraju dolazimo do topološkog prostora $(\mathbb{R}^n, \tau)$, gdje je τ familija svih otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.57. Za topološki prostor (X, τ), $X \neq \emptyset$ i $\tau = \mathcal{P}(X)$, primijetimo da je topologija τ generisana tzv. diskretnom metrikom

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Za proizvoljno $x \in X$ imamo da je $B(x, 1) = \{y | d(x, y) < 1\} = \{x\}$. Dakle, svaka tačka u X u diskretnoj topologiji τ je istovremeno otvoren i zatvoren skup.

1.5. Indukovana ili relativna topologija. Ukoliko je (X, τ) topološki prostor i $Y \subset X$, tada sa

$$\tau_Y = \{U \cap Y | U \in \tau\} \tag{1.12}$$

je definisana takođe topologija na Y, što se lako provjerava. Naime,
1) $\emptyset \in \tau_Y$ i $Y = Y \cap X \in \tau_Y$.
2) Ako je $\mathcal{U}' = \{U_\alpha \cap Y | U_\alpha \in \tau, \alpha \in I\}$ proizvoljna familija skupova iz τ_Y, tada $\cup_{\alpha \in I}(U_\alpha \cap Y) = (\cup_{\alpha \in I} U_\alpha) \cap Y$, takođe pripada τ_Y budući da je $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.
3) Za proizvoljnu konačnu familiju $\mathcal{U}'' = \{U_i \cap Y | U_i \in \tau, i \in \{1, ..., m\}\}$ presjek $\cap_{i=1}^m (U_i \cap Y) = (\cap_{i=1}^m U_i) \cap Y$ pripada τ_Y zbog činjenice da je $\cap_{i=1}^m U_i \in \tau$.

Tako dolazimo do definicije topološkog potprostora.

Definicija 1.58. Neka je (X, τ) topološki prostor i $Y \subset X$. Tada par (Y, τ_Y), gdje je τ_Y definisana sa (1.12), nazivamo topološkim potprostorom topološkog prostora X. Za topologiju τ_Y kažemo da je indukovana ili relativna topologija na Y.

Primjer 1.59. Polazimo od $(\mathbb{R}^2, \tau)$, gdje je τ standardna topologija euklidske ravni. Za $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, indukovana topologija $\tau_{\mathbb{R}}$ je standardna topologija na $\mathbb{R}$. Međutim, otvoren skup, tj. element iz $\tau_{\mathbb{R}}$ ne mora da bude otvoren u $\mathbb{R}^2$, tj. element topologije τ. Primjera radi, otvoreni interval (a, b) jeste element topologije $\tau_{\mathbb{R}}$, a očigledno nije otvoren u standardnoj topologiji euklidske ravni $\mathbb{R}^2$.

Posljednji primjer prirodno nameće pitanje za kakve $Y \subset \mathbb{R}^n$, otvoren skup topološkog prostora Y $((Y, \tau_y))$ biće otvoren u $\mathbb{R}^n$ $((\mathbb{R}^n, \tau))$. Odgovor dajemo u narednoj teoremi, a dokaz ostvaljamo za vježbu čitaocu.

Teorema 1.60. *Neka je $Y \subset \mathbb{R}^n$, pri čemu je na $\mathbb{R}^n$ definisana standardna topologija τ. Tada:*
a) Skup $A \subseteq Y$ je otvoren u Y (element topologije τ_Y) ako i samo ako postoji otvoren skup U iz $\mathbb{R}^n$ takav da je $A = Y \cap U$.
b) Da bi svaki skup A koji je otvoren u Y bio otvoren u $\mathbb{R}^n$ potrebno je i dovoljno da Y bude otvoren u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.61. Ako je $[a, b]$ zatvoren segment realne prave $\mathbb{R}$, primijetimo da su u indukovanoj topologiji (iz $\mathbb{R}$) na $[a, b]$ polusegmenti oblika $[a, c)$ $(c, b]$ kao i intervali (c, d) $(a < c < d < b)$ otvoreni skupovi u $[a, b]$.

1.6. Konvergencija nizova u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.62. Za niz $\{x_k\}_{k \geq 1}, x_k \in \mathbb{R}^n$ tačaka kažemo da konvergira ka tački $x \in \mathbb{R}^n$ ako za svaku okolinu U tačke x postoji prirodan $N \in \mathbb{N}$, takav da je $x_k \in U$ za svako $k > N$.

Definicija 1.62 predstavlja prirodno uopštenje definicije konvergencije niza realnih brojeva iz Analize 1. Interesantno je zapaziti da je konvergencija niza u prethodnoj definiciji data u terminima otvorenih skupova.

Konvergeniciju niza $\{x_k\}_{k \geq 1}$ iz Definicije 1.62 zapisujemo standardno

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

Imajući u vidu da za okolinu U iz Definicije 1.62 možemo da uzmemo loptu $B(0, \epsilon)$ dolazimo do poznatog "$\epsilon - N$" zapisa za konvergenciju niza$\{x_k\}_{k \geq 1}$, tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(k > N \Rightarrow d(x_k, x) < \epsilon). \tag{1.13}$$

Primijetimo da zapis (1.13) zapravo znači da $x_k \to x, k \to \infty$ ako i samo ako $\lim_{k \to \infty} d(x_k, x) = 0$.

Ukoliko označimo sa $x_k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ i $x = (x_1, ..., x_n)$, postavlja se prirodno pitanje da li konvergencija niza u prostoru $\mathbb{R}^n$ povlači konvergenciju po koordinatama i obratno. Odgovor se sastoji u odnosu metrika d i d_∞ (ili d_1) (vidjeti Primjer 1.5), tj. koristeći nejednakosti (1.5) lako dolazimo do sledećeg rezultata.

TEOREMA 1.63. *Neka je* $\{x_k\}_{k\geq 1}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ *i* $x \in \mathbb{R}^n$. *Tada*

$$x_k \to x, k \to \infty \Leftrightarrow x_i^k \to x_i, k \to \infty \ \ \textit{za} \ \ i \in \{1, .., n\}.$$

NAPOMENA 1.64. Konvergenciju niza $\{x_n\}_{n\geq 1}$ moguće je definisati i u proizvoljnom metričkom prostoru $(X, \tilde{d})$.

Tako za niz $\{x_n\}_{n\geq 1}, x_n \in X$ kažemo da konvergira ka tački $x \in X$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj $N \in \mathbb{N}$ takav da $\tilde{d}(x_n, x) < \epsilon$ za svaki prirodan broj n takav da $n > N$, tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow \tilde{d}(x_n, x) < \epsilon).$$

DEFINICIJA 1.65. Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Kažemo da je skup A gust u skupu B ako je $B \subset \overline{A}$. Ako je $\overline{A} = \mathbb{R}^n$, onda kažemo da je A svuda gust u $\mathbb{R}^n$.

Drugačije rečeno, skup A je gust u skupu B ako je svaka tačka skupa B tačka nagomilavanja skupa A.

PRIMJER 1.66. Skup racionalnih brojeva Q je svuda gust u $\mathbb{R}$.

PRIMJER 1.67. Koristeći Teoremu 1.63 zaključujemo da je Q^n svuda gust u $\mathbb{R}^n$. Sa druge strane skup Q^n nije zatvoren u $\mathbb{R}^n$ što jasno slijedi iz Teoreme 1.49 i činjenice da je $\overline{Q^n} = \mathbb{R}^n$.

DEFINICIJA 1.68. Za metrički prostor $(X, \tilde{d})$ kažemo da je separabilan ako sadrži najviše prebrojiv svuda gust podskup.

PRIMJER 1.69. Kako je Q^n prebrojiv i svuda gust u $\mathbb{R}^n$, to je euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ separabilan metrički prostor.

1.7. Neprekidnost funkcija više promjenljivih. Granična vrijednost funkcije

U fokusu razmatranja ovog poglavlja nalaze se funkcije više promjenljivih f definisanih na nekom podskupu $A \subseteq \mathbb{R}^n$, bilo da su one realno vrijednosne $f : A \to \mathbb{R}$ (skalarne funkcije) ili da su u pitanju funkcije sa vrijednostima u višedimenzionalnim prostorima $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$ (vektorske funkcije). Vektorske funkcije $f : A \to \mathbb{R}^m$ standardno zapisujemo $f = (f_1, ..., f_m)$, gdje su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., m\}$ skalarne funkcije. U tekstu koji slijedi standarno navodimo prvo definiciju granične vrijednosti funkcije u tački i potom više ekvivalntnih definicija neprekidnosti funkcije. Osnovna ideja neprekidnosti preslikavanja $x \to f(x)$, da za mala pomjeranja tačke x u efektu imamo takođe mala pomjeranja tačke $f(x)$, biće prezentovana u kontekstu topoloških i metričkih prostora imajući u vidu uvijek osnovni slučaj $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Naredna definicija odnosi se na pojam granične vrijednosti funkcija više promjenljivih.

Definicija 1.70. Neka su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ je tačka nagomilavanja skupa A i $f : A \to \mathbb{R}^n$. Za tačku $b \in \mathbb{R}^m$ kažemo da je granična vrijednost funkcije f u tački $a \in \mathbb{R}^n$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $x \in A$ takvo da je $0 < \|x-a\| < \delta$ važi $\|f(x)-f(a)\| < \epsilon$.

Simbolično zapisano
$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$
Primjećujemo da je definicija granične vrijednosti funkcije više promi–jenljivih u direktnoj koorespondenciji sa definicijom granične vrijednosti realno vrijednosne funkcije $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa razlikom što je metrika u $\mathbb{R}$ zamijenjena euklidskom metrikom u $\mathbb{R}^n$. Takođe, osnovne osobine graničnih vrijednosti funkcije u tački izvodimo analogno odgovarajućim osobinama graničnih vrijednosti realno vrijednosnih funkcija definisanim na $\mathbb{R}$. Primjera radi, ako je $a \in \mathbb{R}^n$ tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : A \to \mathbb{R}^m$, $g : A \to \mathbb{R}^m$ su funkcije koje imaju granične vrijednosti $b_1 \in \mathbb{R}^m$ i $b_2 \in \mathbb{R}^m$ u tački a respektivno, tada
$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b_1 \pm b_2.$$
Ukoliko, na primjer, pod gornjim pretpostavkama uz ograničenje da se radi o skalarnim funkcijama, tj. da je $m = 1$ i ako pretpostavimo da postoje granične vrijednosti funkcija f i g u tački a, onda imamo da važi
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$
Slično, pod prethodnim pretpostavkama zadržavajući uslov $m = 1$ ako je $g(x) \neq 0$ za $x \in A$ i $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ imamo
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$
Poznato je da ekvivalentna definicija granične vrijednosti u tački realno vrijednosne funkcije definisane na $\mathbb{R}$ data i preko Hajneove definicije. Situacija je identična u slučaju funkcija više promjenljivih.

Teorema 1.71. (**Hajneova definicija granične vrijednosti**) *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ je tačka nagomilavanja skupa A i $f : A \to \mathbb{R}^m$. Za tačku $b \in \mathbb{R}^m$ kažemo da je granična vrijednost funkcije f u tački $a \in \mathbb{R}^n$ ako i samo ako za svaki niz tačaka $\{x_k\}_{k\geq 1}$ iz skupa A koji konvergira ka tački a niz $f(x_k)$ konvergira ka b kada $k \to \infty$.*

Definicija neprekidnosti funkcije više promjenljivih u tački slijedi neposredno iz Definicije 1.70.

DEFINICIJA 1.72. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$ je tačka nagomilavanja skupa A i $f : A \to \mathbb{R}^m$. Funkcija f je neprekidna u tački a ako i samo ako $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

U nastavku dajemo topološku definiciju neprekidnosti funkcije koju navodimo u opštijoj situaciji gdje euklidske prostore $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ zamijenjujemo sa topološkim prostorima (X, τ_x) i (Y, τ_y).

DEFINICIJA 1.73. Neka su (X, τ_x) i (Y, τ_y) topološki prostori, $A \subseteq X$, $a \in A$ i $f : A \to Y$. Za preslikavanje f kažemo da je neprekidno u tački a ako za svaku okolinu V tačke $f(a)$ postoji okolina U tačke a takva da

$$f(U \cap A) \subset V.$$

Primijetimo da se prethodna definicija odnosi na neprekidnost funkcije f u tački a u odnosu na relativnu topologiju na A.

Obrazložimo Definiciju 1.73 u terminima "$\epsilon - \delta$" definicije i euklidskih prostora $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ uzimajući konkretno da je okolina V lopta sa centrom u $f(a)$ poluprečnika $\epsilon > 0$, a $U = B(a, \delta)$.

DEFINICIJA 1.74. Neka $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ i $f : A \to \mathbb{R}^m$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u tački a ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ tako da za svako $x \in A$ za koje je $\|x - a\| < \delta$ važi $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$, tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon, a) > 0)(\forall x \in A)(\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon).$$

DEFINICIJA 1.75. Neka $A \subset \mathbb{R}^n$ i $f : A \to \mathbb{R}^m$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna na A ako je neprekidna u svakoj tački $a \in A$.

KOMENTAR 1.76. Ukoliko je f skalarna funkcija iz Definicije 1.75, onda koristimo zapis $f \in C(A)$. Sa druge strane, ako je $f : A \to \mathbb{R}^m$ vektor funkcija u upotrebi je i zapis $f \in C(A; \mathbb{R}^m)$.

TEOREMA 1.77. *Neka* $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ *i* $f = (f_1, ..., f_m)$. *Tada*

$$f \in C(A; \mathbb{R}^m) \text{ ako i samo ako } f_i \in C(A), i \in \{1, ..., m\}.$$

DOKAZ. Dokaz tvrđenja slijedi direktno iz nejednakosti

$$|f_i(x) - f_i(y)| \le \left(\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f_i(y))^2 \right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(y)|,$$

za $x, y \in A$. □

PRIMJER 1.78. Konstantna funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = b, x \in \mathbb{R}^n$, je primjer neprekidne funkcije. Jasno da u proizvoljnoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ i $\delta > 0$ za $x \in \mathbb{R}^n$ iz $\|x - x_0\| < \delta$ imamo da važi $\|f(x) - f(x_0)\| = 0 < \epsilon$.

PRIMJER 1.79. Identitet funkcija, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^n$. Za proizvoljno $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\epsilon > 0$, za $\delta = \epsilon$ i za svako $x \in \mathbb{R}^n$ iz $\|x - x_0\| < \delta$ slijedi $\|f(x_0) - f(x)\| = \|x - x_0\| < \epsilon$.

Primjer 1.80. U ovom primjeru dokazujemo neprekidnost funkcije proizvoda $f(x,y) = xy$. Neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i $\epsilon > 0$. Neka je $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$, tada jasno da je $\|(x,y)\| \leq \delta + \|(x_0,y_0)\|$. Izabraćemo δ pošto ocijenimo razliku

$$\begin{aligned}
&|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \\
&= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\
&\leq |y - y_0||x| + |x - x_0||y_0| \\
&\leq \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}\sqrt{|x|^2 + |y_0|^2} \\
&\leq \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}\sqrt{(\|(x_0,y_0)\| + \delta)^2 + \|(x_0,y_0)\|}.
\end{aligned}$$

Dakle, možemo da izaberemo δ tako da $\sqrt{2}\delta(\delta + \|(x_0,y_0)\|) < \epsilon$. Rješavajući prethodnu nejednačinu nalazimo da je $\delta \in (0, \frac{\sqrt{\|(x_0,y_0)\|^2 + 2\sqrt{2}\epsilon} - \|(x_0,y_0)\|}{2})$.

Primjer 1.81. Norma na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ posmatrana kao funkcija $f(x) = \|x\|$, $x \in$ je neprekidna. Naime, iz već dokazane nejednakosti

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

za normu $\|\cdot\|$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, za prozivoljno ϵ i $x \in \mathbb{R}^n$ uzimajući da je $\delta = \epsilon$ dobijamo da za $y \in \mathbb{R}^n$ za koje je $\|x - y\| < \delta$ slijedi $|f(x) - f(y)| = \|x - y\| < \epsilon$.

Primjer 1.82. Preslikavanje $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$ definisano na način $p_i(x_1, ...x_i, ..., x_n) = x_i$ nazivamo $i-$tom projekcijom. Nejednakost

$$|p_i(x) - p_i(y)| \leq \|x - y\|, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

implicira da je p_i neprekidno preslikavanje na $\mathbb{R}^n$.

Na ovom mjestu navedimo jednu značajnu osobinu preslikavanja p_i. Ako je $G \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, onda će i $p_i(G)$ biti otvoren skup na $\mathbb{R}$ (provjeriti). U opštem, preslikavnja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ koja otvorene skupove slikaju na otvorene skupove nazivaju se **otvorenim** preslikavanjima.

Primjer 1.83. Skalarni proizvod $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ posmatran kao funkcija od jednog argumenta (drugi je fiksiran) je neprekidna funkcija. Neka je $b \in \mathbb{R}^n$ i $f(x) = \langle x, b\rangle$. Pretpostavimo da je $b \neq 0$, u protivnom $f \equiv 0$. Za proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$ i $\epsilon > 0$ birajući da je $\delta = \frac{\epsilon}{\|b\|+1}$ za svako $y \in \mathbb{R}^n$ kad god je $\|x - y\| < \delta$ na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti važi

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\langle x, b\rangle - \langle y, b\rangle| = |\langle x - y, b\rangle| \\
&\leq \|x - y\|\|b\| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Primjer 1.84. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

nije neprekidna u tački $(0,0)$. Naime, prema Definiciji 1.72 potreban i dovoljan uslov neprekidnosti funkcije f u tački $(0,0)$ jeste da f mora da ima graničnu vrijednost u tački $(0,0)$ jednaku $f(0,0)=0$. Dalje, prema Teoremi 1.71 neprekidnost funkcije f u tački $(0,0)$ povlači da za svaki niz (x_n,y_n) koji konvergira ka $(0,0)$ mora da bude $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(0,0)$. Međutim, birajući niz $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$ koji evidentno konvergira ka $(0,0)$ imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0),$$

tj. f nije neprekidna u tački $(0,0)$.

Daćemo i topološki argument za prekid funkcije f u tački $(0,0)$. Ako bi funkcija f bila neprekidna u tački $(0,0)$, onda za svaku okolinu V tačke $f(0,0)=0$ postoji okolina U tačke $(0,0)$ takva da $f(U)\subset V$. Za $0<\epsilon<\frac{1}{2}$ i okolinu $V=(-\epsilon,\epsilon)$ uz pretpostavljenu neprekidnost funkcije f u tački $(0,0)$ postoji okolina U tačke $(0,0)$ takva da

$$f(U)\subset V. \tag{1.14}$$

Međutim, kako je U otvoren skup u $\mathbb{R}^2$ to postoji $\delta>0$ i lopta sa centrom u $(0,0)$ koja pripada U, tj. $B(0,\delta)\subset U$. Tada prava $y=x$ ima neprazan presjek sa $B(0,\delta)$. Prema tome, ako označimo sa $A=\{(x,x)|x\in\mathbb{R}\}$ imamo

$$f(A\cap U)=\frac{1}{2}$$

što je kontradikcija zbog (1.14).

Primijetimo da u posljednjem primjeru postoje tzv. **ponovljene granične vrijednosti funkcije** f u tački $(0,0)$. Konkretno,

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0,\\ l_2 &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Dakle, uprkos činjenici da postoje ponovljene granične vrijednosti funkcije f u tački $(0,0)$ i da su one jednake, funkcija f nije neprekidna u $(0,0)$.

Sljedeći primjer pokazuje da je moguć i obrat. Preciznije, funkcija može da bude neprekidna u tački, a da nema ponovljenu granične vrijednost u toj tački.

Primjer 1.85. Funkcija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y, & y\neq 0, x\in\mathbb{R},\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

je neprekidna u tački $(0,0)$ što slijedi iz nejednakosti $0\le|f(x,y)|\le |x|+|y|$ i zato je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

Sa druge strane,

$$l_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} + y\right) = \lim_{y\to 0} y = 0,$$

a l_1 ne postoji iz razloga što ne postoji $\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$.

U narednoj teoremi dajemo odgovor na pitanje kada postoje pono–vljene granične vrijednosti funkcije u tački u kojoj je neprekidna.

Teorema 1.86. *Neka je* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *gdje* $A = \{(x,y) | 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r\}$ *i pretpostavimo da postoji granična vrijednost* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ *i za svako* $y \neq y_0$, $|y-y_0| < r$, *postoji* $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$, *tada postoji ponovljena granična vrijednost* $\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$ *i važi*

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0}\psi(y) = l.$$

Komentar 1.87. Razmatrane su ponovljene granične vrijednosti za funkcije od dvije promjenljive. Na isti način definišemo i ponovljene granične vrijednosti za funkcije od n promjenljivih, $n > 2$.

Primjer 1.88. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

je neprekidna u tački $(0,0)$ duž svake prave koja prolazi kroz koordinatni početak. Zaista, za fiksiran parametar $\alpha \in [0, 2\pi)$ i pravu $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $t > 0$ (α je ugao koji ta prava zaklapa sa pozitivnim dijelom $x-$ose) imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha} = 0.$$

Funkcija f ipak nije neprekidna u $(0,0)$. Na primjer, za okolinu V nule u $\mathbb{R}$, $V = (-\epsilon, \epsilon)$ gdje $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ i proizvoljnu okolinu U tačke $(0,0)$ imamo

$$f(B \cap U) = \frac{1}{2}, \;\; B = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$$

tj. za svaku okolinu U tačke $(0,0)$ imamo da $f(U) \not\subset V$ (slika). Funkcija f, prema dokazanom, je neprekidna u tački $(0,0)$ po svakom pravcu, dok ako težimo ka $(0,0)$ po paraboli $y = x^2$ funkcija ima prekid u $(0,0)$.

Primjer 1.89. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje. Kao što je poznato dejstvo linearnog preslikavanja A na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ je jedinstveno određeno matricom datog preslikavanaja, koju ćemo označiti isto sa A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gdje se u kolonama nalaze koordinate slika baznih vektora $A(e_i), i \in \{1, ..., n\}$.

Tada za proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$ $Ax = y$ vektor $y = (y_1, ..., y_m)$ je određen sa

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i \in \{1, ..., m\}.$$

U nastvaku za proizvoljno izabrano $x \in \mathbb{R}^n$ primijetimo da koristeći Koši-Švarcovu dobijamo

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \right)^{1/2} \qquad (1.16) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Označimo sa $C = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$. Ukoliko je $C = 0$ preslikavanje se trivijalno svodi na nulto, inače za proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$ i $\epsilon > 0$ birajući $\delta = \frac{\epsilon}{1+C}$ imamo

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \le C\|x - y\| < \epsilon \qquad (1.17)$$

za svako $y \in \mathbb{R}^n$ takvo da $\|y - x\| < \delta$. Time je dokazana neprekidnost linearnog preslikavanja A na $\mathbb{R}^n$.

Primijetimo da prema uvedenoj definiciji norme linearnog preslikavanja (1.5) iz Primjera 1.22 dokazali smo da je

$$\|A\| \le \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

PRIMJER 1.90. **Izometrija metričkih prostora** Neka su (X_1, d_1) i (X_2, d_2) metrički prostori i $f : X_1 \to X_2$ je bijekcija sa svojstvom

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y), \quad \text{(da "čuva rastojanje")}$$

onda za preslikavanje f kažemo da je izometrija metričkih prostora (X_1, d_1) i (X_2, d_2). Za prostore (X_1, d_1) i (X_2, d_2) pod prethodnom pretpostavkom kažemo da su izometrični.

Lako se utvrđuje da je izometrija f neprekidno preslikavnje prostora (X_1, d_1) u (X_2, d_2). Naime, za proizvoljno $\epsilon > 0$ i proizvoljnu tačku $x \in X_1$, jasno da $f(B(x_1, \frac{\epsilon}{2})) \subset B(f(x_1), \epsilon)$.

Slično kao i za neprekidne realno vrijednosne funkcije definisane na $\mathbb{R}$ važi sljedeća teorema.

Teorema 1.91. *Ako su funkcije $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidne na A, onda:*
a)funkcija $f(x) \pm g(x)$ je neprekidna na A;
b)funkcija $f(x)g(x)$ je neprekidna na A;
c) funkcija $\frac{f(x)}{g(x)}$ je neprekidna na $A \setminus \{x | g(x) = 0\}$.

Teorema 1.92. *Neka su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ i $C \subseteq \mathbb{R}^p$ i $f : A \to B$, $g : B \to C$. Ako je funkcija f neprekidna u tački $a \in A$, a funkcija g neprekidna u tački $b = f(a)$, onda je kompozicija funkcija $h = g \circ f$ neprekidna u tački a.*

Dokaz. Za proizvoljno $\epsilon > 0$ zbog neprekidnosti funkcije g u $b = f(a)$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svako $y \in B$ za koje je $\|y - b\| < \delta$ važi $\|g(y) - g(b)\| < \epsilon$. Slično, za dato $\delta > 0$ zbog neprekidnosti funkcije f u tački a postoji $\delta_0 > 0$ tako da za svako $x \in A$ za koje je $\|x - a\| < \delta_0$ važi da je $\|f(x) - b\| < \delta$. Da sumiramo, za dato $\epsilon > 0$ postoji $\delta_0 > 0$ tako da iz $\|x - a\| < \delta_0$ imamo da je $\|g(f(x)) - g(f(a))\| < \epsilon$, tj. h je neprekidna u tački a. $\square$

Primjer 1.93. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (xy, e^{x^2+y^2+z^2}, z + x)$$

biće neprekidno na $\mathbb{R}^3$ ako i samo ako su koordinatne funkcije $f_1(x, y, z) = xy$, $f_2(x, y, z) = e^{z^2+y^2}$ i $f_3(x, y, z) = z + x$ neprekidne skalarne funkcije na $\mathbb{R}^3$.

Tako za funkciju f_1, $f_1 = \psi_1 \circ \varphi_1$, gdje $\varphi_1(x, y, z) = (x, y)$, a $\psi_1(x, y) = xy$. Funkcija ψ_1 je projekcija iz $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^2$, jasno radi se o linearanom preslikavanju čije dejstvo u matričnom obliku možemo da zapišemo na način

$$\psi_1(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dakle, funkcija f_1 je neprekidna $\mathbb{R}^3$ kao kompozicija neprekidnih funkcija $\psi_1 \in C(\mathbb{R}^3)$ (Primjer 1.89) i $\varphi_1 \in C(\mathbb{R}^2)$ (Primjer 1.79). Slično, $f_2 = \psi_2 \circ \varphi_2$, gdje $\psi_2(x) = e^x$, $\varphi_2((x, y, z)) = \|(x, y, z)\|^2$. Funkcija $f_2 \in C(\mathbb{R}^3)$ jer $\psi_2 \in C(\mathbb{R})$ kao elementarna funkcija, a $\varphi_2 \in C(\mathbb{R}^3)$ (Primjer 1.81). Slično je $f_3 \in C(\mathbb{R}^3)$ jer $f_3 = p_1 + p_3$, a projekcije $p_1, p_2 \in C(\mathbb{R}^3)$ (Primjer 1.82), ili na drugi način zapisano $f_3((x, y, z)) = \langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle$, tj. funkciju f_3 možemo da tretiramo kao funkciju skalarnog proizvoda sa fiksiranim argumentom i iz istog razloga je

$f_3 \in C(\mathbb{R}^3)$ (Primjer 1.83). Na kraju, na osnovu Teoreme 1.77 imamo da je $f \in C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.

PRIMJER 1.94. Za funkciju

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2e^{-\frac{1}{xy^2}}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

nije teško provjeriti da je dobro definisana i neprekidna van koordinatnih osa.

Funkcija $f(x,y)$ je neprekidna u proizvoljnoj tački $(x,0)$, $x > 0$, a ima prekid u tačkama $(x,0)$, $x \leq 0$ (provjeriti). Slično se provjerava da funkcija ima prekid u svakoj tački oblika $(0,y)$.

PRIMJER 1.95. Za polinom od n promjenljivih stepena m, P_m : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$P_m(x_1,...,x_n) = \sum_{\alpha_i \geq 0, \sum_{i\geq 1} \alpha_i \leq m} c_{\alpha_1...\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, c_{\alpha_1...\alpha_n} \in \mathbb{R}, \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

koristeći sličan argument kao u Primjeru 1.93 pokazujemo da je neprekidna skalarna funkcija na $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIJA 1.96. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : A \to \mathbb{R}^m$. Za preslikavanje f kažemo da je ravnomjerno neprekidno na A ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $x, y \in A$ iz $\|x - y\| < \delta$ slijedi $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$, tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)(\|x - y\| < \delta \to \|f(x) - f(y)\| < \epsilon).$$

PRIMJER 1.97. Funkcija $f(x,y,z) = \sqrt{x^4 + y^2 + z^4}$ je neprekidna na $\mathbb{R}^3$, ali nije ravnomjerno neprekidna. Naime, za nizove $x_n = (0, n + \frac{1}{n}, 0)$, $y_n = (0, n, 0)$ nije teško utvrditi da $\|x_n - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$, a sa druge strane je $|f(0, n + \frac{1}{n}, 0) - f(0, n, 0)| = \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{2}$.

TEOREMA 1.98. *Neka su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $B \subseteq \mathbb{R}^m$ i $f : A \to B$. Tada su sljedeća tvrđenja ekvivalentna:*
a) funkcija f je neprekidna na A;
b) inverzna slika $f^{-1}(G)$ svakog otvorenog skupa G u B je otvoren skup u A;
c) inverzna slika $f^{-1}(F)$ svakog zatvorenog skupa F u B je zatvoren skup u A;

DOKAZ. $a) \Rightarrow b)$: Neka je f neprekidna funkcija na A i G otvoren skup u B. Tada postoji otvoren skup $\tilde{G}$ u $\mathbb{R}^m$ tako da $G = \tilde{G} \cap B$. Ako je $f^{-1}(G) = \emptyset$ tvrđenje je dokazano, stoga pretpostavimo da $a \in f^{-1}(G)$. Tada $f(a) \in G$, a kako je $\tilde{G}$ otvoren skup, to postoji $r > 0$ tako da lopta $B(f(a), r) \subset \tilde{G}$ i $V = B(f(a), r) \cap B \subset G$. Neprekidnost funkcije f povlači da postoji okolina U tačke a u A takva da je $f(U) \subset V$, što znači da $U \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(G)$. Prema tome, pokazali smo da za tačku

a postoji okolina U u A koja pripada $f^{-1}(G)$, tj. $f^{-1}(G)$ je otvoren skup u A.

$b) \Rightarrow a)$: Neka je $a \in A$ i neka je V proizvoljna okolina tačke $f(a)$ u B. Skup $f^{-1}(V)$ je otvoren u A po pretpostavci tvrđenja iz b), a kako je $a \in f^{-1}(V)$ imamo da je $f^{-1}(V)$ okolina tačke a. Sa druge strane, $f(f^{-1}(V)) \subset V$ pa je f neprekidna u a, odnosno f je neprekidna na A.

$b) \Rightarrow c)$: Budući da je skup $B \setminus F$ otvoren skup, to je $f^{-1}(B \setminus F) = A \setminus f^{-1}(F)$ otvoren skup po pretpostavci tvrđenja b) odnosno $f^{-1}(F)$ je zatvoren. Analognim rezonovanjem slijedi obratno tvređenje. $\square$

Napomena 1.99. Napomenimo da neprekidno preslikavanje ne mora da bude otvoreno, tj. da slika otvorene skupove na otvorene. Kao primjer navodimo funkciju $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ definisanu na $A = (0, \infty)$ koja je evidentno neprekidna na A, a $f((0,1)) = [-1, 1]$.

Definicija 1.100. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $f : A \to B$ kažemo da je homeomorfizam ako je f bijektivno preslikavanje i f i f^{-1} su neprekidna preslikavanja. Za skupove A i B kažemo da su homeomorfni.

Komentar 1.101. Iz same Definicije 1.100 slijedi da je preslikavanje f neprekidno i otvoreno istovremeno. Ako su dva topološka prostora (X, τ_1) i (Y, τ_2) homeomorfna, onda je skup $A \subset X$ otvoren (zatvoren) ako i samo ako je $f(A)$ otvoren (zatvoren) u Y (topologiji τ_2). U određenom smislu, homeomorfizam kao preslikavanje igra ulogu među topološkim prostorima koju ima izomorfizam kao preslikavanje ima u kontekstu algebarskih struktura.

Primjer 1.102. Pokažimo da je skup $A = \{(x,y,z) | x^2+y^2 < x, z > x^2+y^2, x+y+z < -5\}$ otvoren. Sam skup A možemo da predstavimo na način $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, gdje je $A_1 = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 < x\}$, $A_2 = \{(x,y,z) | z > x^2+y^2\}$, $A_3 = \{(x,y,z) | x+y+z+5 < 0\}$. Skupove A_i $i \in \{1,2,3\}$ zapišimo dalje

$$A_1 = \{(x,y,z) | \varphi_1(x,y,z) < 0\} = \varphi_1^{-1}((-\infty, 0));$$
$$A_2 = \{(x,y,z) | \varphi_2(x,y,z) < 0\} = \varphi_2^{-1}((-\infty, 0));$$
$$A_3 = \{(x,y,z) | \varphi_3(x,y,z) < 0\} = \varphi_3^{-1}((-\infty, 0)),$$

gdje $\varphi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - x$, $\varphi_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ i $\varphi_3(x,y,z) = x + y + z + 5$. Kako su $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C(\mathbb{R}^3)$, to su skupovi A_i $i \in \{1,2,3\}$ otvoreni kao inverzne slike otvorenog skupa $(-\infty, 0)$ u $\mathbb{R}$ pri neprekidnim preslikavanjima φ_i $i \in \{1,2,3\}$ respektivno. Skup A je otvoren kao presjek konačnog broja otvorenih skupova.

1.8. Kompletnost. Banahova teorema o nepokretnoj tački

Kao što nam je poznato svaki Košijev ili fundamentalni niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan. Navedeno svojstvo prostora $\mathbb{R}$ predstavlja jedno od fundamentalnih svojstava realne prave. Po već ustaljenom modelu do sada pomenuto svojstvo razmatramo i u slučaju euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$. Naredne definicije date su u terminima metričkih prostora.

Definicija 1.103. Niz tačaka $\{x_n\}_{n\geq 1}$ metričkog prostora $(X, \tilde{d})$ je Košijev niz ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za indekse $n, m > n_0$ važi $\tilde{d}(x_n, x_m) < \epsilon$. Zapisano simbolički

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0 \Rightarrow \tilde{d}(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Definicija 1.104. Metrički prostor $(X, \tilde{d})$ je kompletan ako svaki Košijev niz iz X konvergira u njemu.

Primjer 1.105. Poznati primjer kompletnog metričkog prostora iz Analize 1 je $(\mathbb{R}, d)$.

Primjer 1.106. (**Metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ je kompletan**) Metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ je takođe kompletan. Naime, ako je $\{x_k\}_{k\geq 1}$ $(x_k = (x_1^k, ..., x_n^k))$ Košijev niz u $\mathbb{R}^n$, onda će zbog Teoreme 1.63 svaki od nizova realnih brojeva $\{x_i^k\}_{k\geq 1}$, $i \in \{1, ..., n\}$ biti Košijev niz u $\mathbb{R}$ pa prema tome i konvergentan u $\mathbb{R}$, tj. postoji $\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i, i \in \{1, ..., n\}$. Tada opet zbog Teoreme 1.63 važi da $x_k \to x, k \to \infty$ u metrici d prostora $\mathbb{R}^n$, tj. $(\mathbb{R}^n, d)$ je kompletan metrički prostor.

Primjer 1.107. Skup $\mathbb{Q}^n$ nije kompletan u $(\mathbb{R}^n, d)$, što se može provjeriti uzimajući, na primjer, tačku $(x_1, q_2, ..., q_n)$ (za slučaj da je $n > 1$) gdje su $q_i, 2 \leq i \leq n$ fiksirani racionalni brojevi, dok je $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Kako je skup $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ to postoji neki niz racionalnih brojeva $\{q^j\}_{j\geq 1}$ takav da $\lim_{j\to\infty} q^j = x_1$. Tada $\{(q^j, q_2, ..., q_n)\}_{j\geq 1}$ je očigledno Košijev niz u $\mathbb{Q}^n$ koji konvergira ka tački $(x_1, q_2, ..., q_n)$ koja ne pripada $\mathbb{Q}^n$.

Primijetimo da u posljednjem primjeru skup $\mathbb{Q}^n$ nije zatvoren u $\mathbb{R}^n$ u čemu bi se mogao naslutiti razlog zašto dati prostor nije kompletan. Sledeća teorema daje odgovor u opštijoj situaciji tretirajući metrički prostor $(X, \tilde{d})$ umjesto $(\mathbb{R}^n, d)$.

Teorema 1.108. *Neka je $(X, \tilde{d})$ kompletan metrički prostor i $Y \subset X$. Tada metrički potprostor $(Y, \tilde{d})$ je kompletan ako i samo ako je Y zatvoren skup u X.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(Y, \tilde{d})$ kompletan metrički prostor i neka je $x \in \overline{Y}$. Tada kako je x tačka nagomilavanja skupa Y, to postoji niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ iz Y koji konvergira ka x. Međutim, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ je Košijev niz što jednostavno dokazuje. Naime, za proizvoljno $\epsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $n > n_0$ slijedi da je $\tilde{d}(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Tada za sve indekse $m, n > n_0$ imamo

$$\tilde{d}(x_n, x_m) \leq \tilde{d}(x, x_n) + \tilde{d}(x_m, x) < \epsilon.$$

Zaključujemo da je niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ konvergentan u Y i zbog jedinstvenosti granice limesa u metričkom prostoru (provjeriti) važi $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in Y$, tj. $\overline{Y} = Y$.

Obratno, pretpostavimo da je Y zatvoren skup u metričkom prostoru X. Neka je $\{x_n\}_{n\geq 1}$ Košijev niz u metričkom potprostoru $(Y, \tilde{d})$. Tada je $\{x_n\}_{n\geq 1}$ takođe Košijev niz u širem metričkom prostru $(X, \tilde{d})$. Kako je $(X, \tilde{d})$ kompletan metrički prostor, to je niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ konvergentan u X i označimo opet sa $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sa druge strane, Y je zatvoren skup i zato sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, tj. $x \in Y$. Zaključujemo da je $(Y, \tilde{d})$ kompletan metrički prostor. □

Dokazano je da svaki $(X, \|\cdot\|)$ normiran vektorski prostor možemo da posmatramo i kao odgovarajući metrički prostor, slično važi i za Euklidov prostor. U tom smislu sljedeće dvije definicije pojavljuju se kao određeni specijalni slučajevi već uvedene Definicije 1.104.

Definicija 1.109. Za normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ kažemo da je Banahov ako je on kompletan u metrici koja je indukovana normom $\|\cdot\|$.

Primjer 1.110. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je Banahov prostor.

Pretpostavimo da je na vektorskom prostoru X definisan skalarni proizvod $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.111. Euklidov prostor X koji je Banahov prostor u normi indukovanoj skalarnim proizvodom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nazivamo Hilbertovim prostorom.

Primjer 1.112. Prostor $\mathbb{R}^n$ na kome je definisan standardni skalarni proizvod $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ je kanonski primjer za Hilbertov prostor.

Narednu definiciju i Teoremu 1.115 dajemo u kontekstu metričkih prostora.

Definicija 1.113. Neka su (X, d_1) i (Y, d_2) metrički prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ nazivamo kontrakcijom ako postoji realan broj $q, q \in (0, 1)$, takav da za svako $x, y \in X$ važi $d_2(f(x), f(y)) \leq q d_1(x, y)$.

Komentar 1.114. Broj q nazivamo koeficijentom kontrakcije preslikavanja f.

Sledeća teorema predstavlja poznati i klasični rezultat u matematičkoj analizi sa brojnim primjenama i uopštenjima. Napomenimo da za preslikavanje $f : X \to X$ metričkog prostora X u sebe kažemo da ima nepokretnu (fiksnu) tačku ako postoji $x^* \in X$ tako da je $f(x^*) = x^*$.

Teorema 1.115. *(***Banahova teorema o nepokretnoj tački***)* *Neka je $f : X \to X$ kontrakcija kompletnog metričkog prostora $(X, \tilde{d})$*

u samog sebe sa koeficijentom kontakcije q. Tada preslikavanje f ima jedinstvenu nepokretnu tačku. Dodatno,

$$\tilde{d}(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\tilde{d}(x_1, x_0). \tag{1.18}$$

Dokaz. Uzimajući proizvoljno $x_0 \in X$ formiramo niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ na način $x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \ldots$. Dokazujemo da je $\{x_n\}_{n\geq 1}$ je Košijev niz. U tom cilju, primijetimo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\tilde{d}(x_{n+1}, x_n) = \tilde{d}(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q\tilde{d}(x_n, x_{n-1}),$$

tako dobijamo da je

$$\tilde{d}(x_{n+1}, x_n) \leq q^n\tilde{d}(x_1, x_0), \text{ za svako } n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Pretpostavimo da $\tilde{d}(x_1, x_0) \neq 0$, u protivnom $f(x_0) = x_0$. Kako je $0 < q < 1$, to za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k < \frac{\epsilon}{\tilde{d}(x_1, x_0)}.$$

Neka su sada $m, n \in \mathbb{N}$ $(m > n)$ takvi da $m, n > n_0$. Tada posljednja nejednakost, (1.19) i nejednakost trougla za metriku daju

$$\tilde{d}(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \tilde{d}(x_k, x_{k+1}) \leq \tilde{d}(x_1, x_0)\sum_{k=n}^{m-1} q^k \leq \tilde{d}(x_1, x_0)\sum_{k=n}^{\infty} q^k < \epsilon. \tag{1.20}$$

Zaključujemo da je $\{x_n\}_{n\geq 1}$ Košijev niz. Zbog kompletnosti prostora X postoji tačka $x^* \in X$ tako da niz x_n konvergira ka x^*. Ostaje da se pokaže da je x^* nepokretna tačka preslikavanja f.

Nejednakosti

$$0 \leq \tilde{d}(x_n, f(x^*)) = \tilde{d}(f(x_{n-1}), f(x^*)) \leq q\tilde{d}(x_{n-1}, x^*) \tag{1.21}$$

uz činjenicu da $x_n \to x^*$ kad $n \to \infty$ povlače da $x_n \to f(x^*)$, kada $n \to \infty$. Primijetimo da u posljednjem zaključku koristimo neprekidnost funkcije $F : X \to X$, $F(x) = \tilde{d}(x, x^*)$. Naime, iz nejednakosti (1.1) imamo da važi $|F(x) - F(y)| \leq \tilde{d}(x, y)$ za proizvoljne $x, y \in X$. Sada iz (1.21) puštajući da $n \to \infty$ slijedi da je $x^* = f(x^*)$.

Tačka x^* je jedinstvena. U suprotnom bi postojala još jedna tačka $y^* \in X$ takva da $y^* = f(y^*)$. Međutim, iz

$$\tilde{d}(x^*, y^*) = \tilde{d}(f(x^*), f(y^*)) \leq q\tilde{d}(x^*, y^*)$$

slijedi da je $(1-q)\tilde{d}(x^*, y^*) \leq 0$, što je moguće samo kada je $\tilde{d}(x^*, y^*) = 0$, tj. $x^* = y^*$.

Na kraju, puštajući da $m \to \infty$ u (1.20) dobijamo nejednakost

$$\tilde{d}(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\tilde{d}(x_1, x_0).$$

$\square$

KOMENTAR 1.116. Jedna od važnih poruka dokaza prethodne teoreme jeste da sa proizvoljnim izborom tačke $x_0 \in X$ formiramo iterativni niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ koji konvergira ka nepokretnoj tački preslikavanja $f : X \to X$.

KOMENTAR 1.117. Nejednakost (1.18) daje ocjenu greške za slučaj da uzmemo da je x_n rješenje jednačine $x = f(x)$ u X umjesto x^*.

Na sljedećem jednostavnom primjeru realno vrijednosne funkcije definisane na segmentu ilustrujemo primjenu Banahove teoreme o nepokretnoj tački.

PRIMJER 1.118. Neka je $f(x) = \frac{e^{-x}\cos x}{2}$, $x \in [0,1]$. Prije svega, kako je $[0,1]$ zatvoren u $\mathbb{R}$, to je $([0,1],d)$ kompletan metrički prostor. Nije teško utvrditi da je $f([0,1]) \subset [0,1]$. Kako je

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x}\sin(x+\frac{\pi}{4}) < 0 \text{ za } x \in [0,1],$$

na osnovu Lagranžove teoreme o srednjim vrijednostima imamo dodatno da je

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{0\leq t\leq 1} |f'(t)||x-y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y|,$$

tj. f je kontrakcija metričkog prostora $([0,1],d)$ na sebe. Prema Teoremi 1.115 postoji jedinstveno rješenje jednačine $f(x) = x$ na segmentu $[0,1]$.

PRIMJER 1.119. Za afino preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + 1, \frac{y}{3} - \frac{x}{4} + 2)$ zapisano u matričnom obliku

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lako se utvrđuje da je bijekcija iz $\mathbb{R}^2$ na sebe.

Dalje, na osnovu nejednakosti (1.17) iz Primjera 1.89 imamo da je

$$\|f(x,y) - f(u,v)\| \leq C\|(x,y) - (u,v)\|,$$

gdje je $C = \frac{\sqrt{35}}{6\sqrt{2}} = q < 1$, tj. f je kontrakcija kompletnog metričkog prostora $(\mathbb{R}^2, d)$ na sebe.

Konačno, na osnovu Teoreme 1.115 postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f, tj. $f(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$.

Primijetimo da je fiksna tačka (x^*, y^*) preslikavanja f zapravo rješenje sistema linearnih jednačina od dvije nepoznate

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y &= -1 \\ -\tfrac{1}{4}x - \tfrac{2}{3}y &= -2, \end{aligned}$$

(pogledati Zadatak 21).

1.9. Kompaktnost.

DEFINICIJA 1.120. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Za familiju skupova $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$, gdje je I neki indeksni skup, kažemo da je pokrivač skupa A ako je $A \subset \cup_{i \in I} U_i$. Potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$ skupa A je familija $\{U_{i'} | i' \in I\} \subset \{U_i | i \in I\}$ koja je pokrivač skupa A. Otvoren pokrivač skupa A je pokrivač koji se sastoji od otvorenih skupova.

Poznato je da neprekidna realno vrijednosna funkcija na segmentu ima niz "finih" svojstava kao što što su na primjer ograničenost, dostizanje minimalne (maksimalne) vrijednosti i ravnomjerna neprekidnost koje više nisu na snazi u opštem ako je domen definisanosti, na primjer, interval.

Postavlja se u tom smislu pitanje koja su to svojstva segmenta koja "prenesana" na određen domen u $\mathbb{R}^n$ čine da neprekidne funkcije definisane na tim domenima zadržavaju gore pomenuta svojstva.

U nastavku dajemo više ekvivalentnih karakterizacija kompaktnih skupova sa fokusom na Teoremi 1.131 gdje su dati potrebni i dovoljni uslovi da neki skup u $\mathbb{R}^n$ bude kompaktan. U teoremama, Teorema 1.134, Teorema 1.135 i Teorema 1.139 dokazano je da pomenuta "fina" svojstava neprekidnih funkcija na kompaktnim skupovima u $\mathbb{R}^n$ su i dalje validna.

DEFINICIJA 1.121. Za skup $K, K \subset \mathbb{R}^n$, kažemo da je kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ ako iz svakog otvorenog pokrivača skupa K može da se izdvoji konačan potpokrivač.

KOMENTAR 1.122. Otvoren pokrivač iz Definicije 1.121 odnosi se otvorene skupove prostora $\mathbb{R}^n$. Međutim, svojstvo kompaktnosti ne zavisi od okolnog prostora. Preciznije, otvoren pokrivač iz prethodne definicije može da se odnosi i na indukovanu topologiju na skupu K. Naime, ako je K kompaktan skup po Definiciji 1.121 i $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ otvoren pokrivač u indukovanoj topologiji skupa K, tada za svako $i \in I$ postoji otvoren skup G_i u $\mathbb{R}^n$ tako da je $U_i = K \cap G_i$. Prema tome, familija $\{G_i | i \in I\}$ je otvoren pokrivač za skup K iz kog je moguće da se izdvoji konačan potpokrivač $\{G_{i_k} | 1 \le k \le p\}$. Jasno da je tada i $\{U_{i_k} | 1 \le k \le p\}$ konačan otvoren potpokrivač u indukovanoj topologiji na skupu K.

Slično bismo dokazali da ako je K kompaktan skup u indukovanoj topologiji (prostora K) da je K kompaktan i smislu Definicije 1.121. Zaista, ako je $\{G_\alpha | \alpha \in I\}$ otvoren pokrivač skupa K, onda je $\{K \cap G_\alpha | \alpha \in I\}$ otvoren pokrivač skupa K u indukovanoj topologiji na K, pa postoji konačan potpokrivač $\{K \cap G_{\alpha_k} | 1 \le k \le m\}$ skupa K. Očigledno je da $\{G_{\alpha_k} | 1 \le k \le m\}$ je konačan otvoren potpokrivač skupa K.

TEOREMA 1.123. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je kompaktan u indukovanoj topologiji samog sebe.*

DOKAZ. Komentar 1.122. □

PRIMJER 1.124. Svaki konačan podskup u $\mathbb{R}^n$ je kompaktan.

U sljedećem primjeru dokazujemo da je proizvoljan segment $[a, b]$ kompaktan skup u standardnoj topologiji realne prave $\mathbb{R}$ osljanjajući se na teoremu o sistemu sažimajućih segmenata poznatu iz prethodnog kursa Analize 1.

PRIMJER 1.125. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač segmenta $I = [a, b]$ takav da iz njega nije moguće izdvojiti konačan potpokrivač. Za datu kolekciju intervala $\mathcal{U}$ navedeno svojstvo segmenta I označimo sa $\mathcal{P}$. Dalje bar jedan od podsegmenata $I_{11} = [a, u]$ ili $I_{12} = [u, b]$, gdje je $u = \frac{a+b}{2}$ zadržava pređašnje svojstvo $\mathcal{P}$. Naime, ukoliko bi iz otvorenog pokrivača $\mathcal{U}$ segmenata I_{11} i I_{12} mogli da izdvojimo konačan potpokrivač za svaki od njih, onda bi unija datih potpokrivača bila konačno potpokrivanje segmenta I, što je u suprotnosti sa početnom pretpostavkom.

U nastavku, određenosti radi, pretpostavimo da segment I_{11} zadržava svojstvo $\mathcal{P}$. Dijeljeći segment I_{11} na dva jednaka podsegmenta I_{21} i I_{22} i ponavljajući prethodno rezonovanje bez umanjenja opštosti pretpostavimo da segment I_{22} ima svojstvo $\mathcal{P}$.

Nastavljajući proces dijeljenja dolazimo do niza umetnutih segmenata $\{I_{nn}\}_{n\geq 1}$, $I_{nn} \subset I_{kk}$, $n > k$ sa svojstvom $|I_{nn}| = \frac{b-a}{2^n}$. Tada na osnovu teoreme o sažimajućim segmentima imamo da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{nn} = \{c_0\}$. Budući da $c_0 \in [a, b]$, to postoji neki interval $U_0 \in \mathcal{U}$ takav da $c_0 \in U_0$. Sa druge strane, postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da $I_{mm} \subset U_0$, tj. segment I_{mm} je pokriven samo jednim intervalom iz otvorenog pokrivača $\mathcal{U}$, što je suprotno njegovoj konstrukciji. Dobijena kontradikcija povlači da je segment I kompaktan skup.

PRIMJER 1.126. Ako je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $x \in \mathbb{R}^m$, tada je $\{x\} \times K$ kompaktan skup u $\mathbb{R}^{m+n}$ (provjeriti).

U Teoremi 1.127 pokazujemo da je Dekartov proizvod kompaktnih skupova takođe kompaktan skup. Prethodno dokažimo sljedeće pomoćno tvrđenje.

LEMA 1.127. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač skupa $\{x\} \times K$, gdje je $x \in \mathbb{R}^m$. Tada postoji otvoren skup $U \subset \mathbb{R}^m$ koji sadrži tačku x tako da je skup $U \times K$ pokriven konačnim brojem skupova iz $\mathcal{U}$.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{U} = \{W_i | i \in I\}$ otvoren pokrivač skupa $\{x\} \times K$ za neki indeksni skup I. Tada za svako $y \in K$ tačka (x, y) je pokrivena otvorenim skupom W_{i_0} iz $\mathbb{R}^{m+n}$ za neko $i_0 \in I$. Dalje kako je W_{i_0} otvoren skup u $\mathbb{R}^{m+n}$, to postoji otvoren skup oblika $U_{i_0} \times V_{i_0} \subset \mathbb{R}^{m+n}$, takav da $(x, y) \in U_{i_0} \times V_{i_0} \subset W_{i_0}$. Familija $\{V_i | i \in I\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa K, pa tako postoji konačan potpokrivač $\{V_{i_k} | 1 \leq k \leq p\}$ skupa K. Takođe, $\{U_{i_k} \times V_{i_k} | 1 \leq k \leq p\}$ je konačan potpokrivač za $\{x\} \times K$. Tada okolina $U = \cap_{k=1}^{p} U_{i_k}$ zadovoljava tražene uslove. □

TEOREMA 1.128. *Ako su* $K_1 \subset \mathbb{R}^m$ *i* $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ *kompaktni skupovi, onda je* $K_1 \times K_2$ *kompaktan skup u* $\mathbb{R}^{m+n}$

DOKAZ. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač skupa $K_1 \times K_2$, tada $\mathcal{U}$ pokriva $\{x\} \times K_2$ za svako $x \in K_1$. Prema Lemi 1.127 postoji otvoren skup U_x, $x \in U_x$, takav da je $U_x \times K_2$ pokriven konačnim brojem skupova iz $\mathcal{U}$. Kako je K_1 kompaktan skup to iz otvorenog pokrivanja $\{U_x | x \in K_1\}$ skupa K_1 moguće je izdvojiti konačan broj otvorenih skupova $U_{x_1}, ..., U_{x_p}$ koji pokrivaju K_1. Konačno mnogo skupova iz $\mathcal{U}$, prema Lemi 1.127, pokriva skup $U_{x_i} \times K_2$, $1 \leq i \leq p$, to i unija pomenutih pokrivača je konačan otvoren potpokrivač skupa $K_1 \times K_2$. □

POSLJEDICA 1.129. *Neka su* $K_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ *kompaktni skupovi za* $i \in \{1, ..., m\}$. *Tada je skup* $K_1 \times \cdots \times K_m$ *kompaktan u* $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_m}$.

DOKAZ. Dokaz slijedi iz Teoreme 1.128 indukcijom po m. □

PRIMJER 1.130. Iz Teoreme 1.128 i Primjera 1.125 slijedi da je skup $I_{a,b} = \{(x_1, ..., x_n) | a_i \leq x_i \leq b_i\}$ ($a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$, $a_i < b_i$) tzv. $n-$**segment**, je kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ jer $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Definicija 1.121 čini se u izvjesnom smislu nedovoljno operativnom za provjeru kompaktnosti skupova u $\mathbb{R}^n$. U narednoj teoremi kao što je najavljeno data je nova karakterizacija kompaktnosti skupova u prostoru $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.131. **(Hajne-Borelova teorema)** *Skup* $K \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktan ako i samo ako je* K *zatvoren i ograničen.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je K kompaktan skup. Neka je $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Tada za svako $x \in K$ lopte $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ i $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$ su disjunktne. Familija $\{B(x, \frac{d(x,y)}{2}) | x \in K\}$ predstavlja otvoren pokrivač skupa K. Kako je K kompaktan skup, to postoji konačan potpokrivač $\{B(x_i, \frac{d(x_i,y)}{2}) | 1 \leq i \leq m\}$, skupa K. Označimo sa $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{d(x_i,y)}{2}$. Tada je lopta $B(y, \delta) \subseteq B(y, \frac{d(x_i,y)}{2})$. Kako su lopte $B(y, \frac{d(x_i,y)}{2})$ disjunktne sa $B(x_i, \frac{d(x_i,y)}{2})$, to će i $B(y, \delta)$ biti disjunktna sa svakom od lopti $B(x_i, \frac{d(x_i,y)}{2})$, tj. $B(y, \delta) \cap K = \emptyset$, odnosno K je zatvoren.

Neka je dalje $x_0 \in K$ proizvoljna tačka. Tada familija $\{B(x_0, k) | k \in \mathbb{N}\}$ pokriva skup K, pa postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da $K \subset B(x, k_0)$, tj. K je ograničen.

U obratnom smjeru, pretpostavimo da je K zatvoren i ograničen skup. Tada postoji $n-$segment $I_{a,b}$ takav da $K \subset I$. Neka je $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ otvoren pokrivač skupa K. Dodavanjem skupa $\mathbb{R}^n \setminus K$, nova familija $\{U_\alpha | \alpha \in I\} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\}$ predstavlja otvoren pokrivač skupa $I_{a,b}$, pa se može izdvojiti konačan potpokrivač. Na kraju izbacivanjem skupa $\mathbb{R}^n \backslash K$ (ako se on nalazi u potpokrivaču) dobijamo konačan potpokrivač skupa K, tj. K je kompaktan skup. $\square$

PRIMJER 1.132. Iz Teoreme 1.131 slijedi da je zatvorena lopta $\overline{B}(a,r)$ kompaktan skup za proizvoljno $a \in \mathbb{R}^n$ poluprečnika $r > 0$ kao i sfera $S^{n-1}(a,r)$.

Dokaz sljedeće teoreme ostavljamo za vježbu čitaocu.

TEOREMA 1.133. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako svaki niz iz K ima podniz koji konvergira u K.*

U narednoj teoremi pokazujemo da je slika kompaktnog skupa pri neprekidnom preslikavanju kompaktan skup. U najkraćem rekli bismo da je kompaktnost je topološka invarijanta, tj. osobina koja se čuva pri dejstvu neprekidnih preslikavanja.

TEOREMA 1.134. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $f : K \to \mathbb{R}^m$ neprekidna funkcija.Tada je skup $f(K)$ kompaktan.*

DOKAZ. Neka je $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ otvoren pokrivač skupa $f(K)$ u $\mathbb{R}^m$. Familija $\{f(K) \cap U_\alpha | \alpha \in I\}$ čini otvoren pokrivač skupa K u indukovanoj topologiji. Kako je funkcija f neprekidna, to su prema Teoremi 1.98 skupovi $f^{-1}(U_\alpha \cap f(K))$ otvoreni u indukovanoj topologiji skupa K. Dalje,

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) = f^{-1}(\cup_{\alpha\in I}(U_\alpha \cap f(K))) = \cup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha \cap f(K)),$$

tj. $\{f^{-1}(U_\alpha \cap f(K)) | \alpha \in I\}$ je otvoren pokrivač skupa K (u indukovanoj topologiji skupa K). Kako je K kompaktan skup to postoji konačan potpokrivač $\{f^{-1}(U_{\alpha_i} \cap f(K)) | 1 \leq i \leq m\}$ skupa K. Tako iz $K \subseteq \cup_{i=1}^m f^{-1}(U_{\alpha_i} \cap f(K))$ slijedi $f(K) \subseteq \cup_{i=1}^m (U_{\alpha_i} \cap f(K))$, tj. $\{U_{\alpha_i} \cap f(K) | 1 \leq i \leq m\}$ je konačan potpokrivač skupa $f(K)$. Dakle, $f(K)$ je kompaktan skup. $\square$

TEOREMA 1.135. *Ako je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje, tada funkcija f dostže maksimalnu i minimalnu vrijednost na skupu K.*

DOKAZ. Potrebno je pokazati da postoje tačke $x, y \in K$ takve da

$$f(x) = \sup_{z\in K} f(z) = \max_{z\in K} f(z) \text{ i } f(y) = \inf_{z\in K} f(z) = \min_{z\in K} f(z).$$

Neka je $\tilde{K} = f(K)$. Skup $\tilde{K}$ je kompaktan na osnovu Teoreme 1.134. Označimo sa $a = \inf \tilde{K}$ i $b = \sup \tilde{K}$. Kako je $\tilde{K}$ ograničen skup, to je jasno da $-\infty < a \leq b < \infty$. Dalje, kako su a i b tačke nagomilavanja skupa $\tilde{K}$, to zbog zatvorenosti skupa $\tilde{K}$, $a \in \tilde{K}$ i $b \in \tilde{K}$, pa postoje tačke $x \in K$ i $y \in K$ tako da $a = f(y)$ i $b = f(x)$. $\square$

U narednoj teoremi dokazujemo da su proizvoljne dvije norme definisane na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru X ravnomjerno ekvivalentne što za posljedicu ima da u problemima vezanim za konvergenciju u X možemo birati pogodniju normu.

TEOREMA 1.136. *Svake dvije norme na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru su ravnomjerno ekvivalentne.*

DOKAZ. Neka je $\dim(X) = n$ i $\{e_1, ..., e_n\}$ baza prostora X. Za proizvoljni vektor $x \in X$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ definišemo normu $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Tada su normirani prostori $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ i $(X, \|\cdot\|_\infty)$ izometrični $((x_1, ..., x_n) \to \sum_{i=1}^n x_i e_i)$. Neka su dalje $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ norme definisane na X.

Dokažimo da je preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_1$ neprekidno u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$. Kako je

$$\|x\|_1 = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \sum_{i=1}^n \|e_i\|_1 = C\|x\|_\infty,$$

to prema (1.4) imamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |\|x\|_1 - \|x_0\|_1| \leq \|x - x_0\|_1 \leq C\|x - x_0\|_\infty,$$

tj. f je neprekidna u odnosu na $\|\cdot\|_\infty$. Dalje, jedinična sfera u $(X, \|\cdot\|_\infty)$ je kompaktan skup (zbog izometrije sa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$), pa prema Teoremi 1.135 postoje pozitivne konstante C_1 i C_2 takve da

$$C_1 \leq \|x\|_1 \leq C_2, \|x\|_\infty = 1.$$

Konstante C_1 i C_2 su pozitivne jer je $x \neq 0$ kad god je $\|x\|_\infty = 1$.

Dakle, za proizvoljno $x \in X \setminus \{0\}$ važi

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_1 \leq C_2$$

odnosno

$$C_1\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_\infty, x \in X.$$

Analogno bismo dokazali da za neke pozitivne konstante C_1' i C_2' važi

$$C_1'\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq C_2'\|x\|_\infty, x \in X,$$

odakle dobijamo

$$\frac{C_1}{C_2'}\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \frac{C_2}{C_1'}\|x\|_\infty, x \in X.$$

□

PRIMJER 1.137. U ovom primjeru pokazujemo neprekidnost linearnog preslikavanja $A : X \to Y$, gdje je su X i Y normirani prostori, a X je konačno dimenzionalni vektorski prostor. Polazeći od definicije norme lineranog preslikavanja (1.5),

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\| \tag{1.22}$$

i posljedične nejednakosti $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, x \in X$, dovoljno je pokazati da je $\|A\|$ ograničeno.

Sa druge strane, kako je X konačno dimenzionalan vektorski prostor, recimo $\dim(X) = n$, to postoji baza vektorskog prostora koju ćemo da označimo sa $\{e_1, ..., e_n\}$. Tada prema Teoremi 1.136 postoje konstante $c_0, c_1 > 0$ takva da je $c_0\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_1\|x\|_\infty$.

Označavajući sa $C = \max_{1\leq i\leq n} \|Ae_i\|_\infty$ dobijamo

$$\|A\| \leq \frac{c_1\|Ax\|_\infty}{c_0\|x\|_\infty} = \frac{c_1C\|x\|_\infty}{c_0\|x\|_\infty} = \frac{c_1C}{c_0}.$$

Primjer 1.138. Neka je $B : X \times Y \to Z$ bilinearno preslikavanje, pri čemu su X, Y i Z normirani konačno dimenzionalni vektorski prostori. Pretpostavimo da $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$. Pokažimo da je B neprekidno preslikavanje. Na početku pokazaćemo da je norma bilinearnog preslikavanja B ograničena. Prema (1.7) imamo da je $\|B\| = \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} \|B(x, y)\|$. Ako sa $\{e_1, ..., e_n\}$ i $\{e'_1, ..., e'_m\}$ označimo orto–normirane baze prostora X i Y respektivno onda za $x \in X$ i $y \in Y$ imamo odgovarajuće prezentacije, $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$ i kako je $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ to prema Teoremi 1.136 imamo

$$\begin{aligned}\|B(x, y)\| &= \|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x_iy_jB(e_i, e_j)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |x_i||y_j|\|B(e_i, e_j)\| \\ &\leq \|x\|_\infty\|y\|_\infty \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \|B(e_i, e_j)\| \\ &\leq C\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \|B(e_i, e_j)\|\end{aligned} \tag{1.23}$$

tj. $\|B\| \leq C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|B(e_i, e_j)\|$.

Neka je dalje $(x, y) \in X \times Y$ i $(h, k) \in X \times Y$, tada

$$B(x + h, y + k) - B(x, y) = B(h, y) + B(x, k) + B(h, k),$$

odnosno

$$\begin{aligned}&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \|B(x + h, y + k) - B(x, y)\| \\ &\leq \|B\| \lim_{(h,k)\to(0,0)} (\|h\|\|y\| + \|x\|\|k\| + \|h\|\|k\|) = 0,\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je B neprekidno bilinearno preslikavanje na $X \times Y$.

Zaključujemo ovo poglavlje uopštenjem na početku pomenute teoreme o svojstvu ravnomjerne neprekidnosti neprekidnih funkcija na segmentu.

TEOREMA 1.139. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $f : K \to \mathbb{R}^m$ neprekidna funkcija. Tada je funkcija f ravnomjerno neprekidna na K.*

DOKAZ. Polazeći od neprekidnosti funkcije f zaključujemo da za proizvoljno $\epsilon > 0$ za svako $x \in K$ postoji $\delta(x, \epsilon) > 0$ tako da

$$d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ kad god je } d(x, y) < \delta(x, \epsilon).$$

Familija $\{B(x, \frac{\delta(x,\epsilon)}{2}) | x \in K\}$ je otvoren pokrivač skupa K, pa zbog pretpostavljene kompaktnosti može se izdvojiti konačan potpokrivač $\{B(x_i, \frac{\delta(x_i,\epsilon)}{2}) | 1 \leq i \leq m\}$ skupa K. Neka je sada $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{\delta(x_i,\epsilon)}{2} > 0$. Za $x, y \in K$ i $d(x, y) < \delta$ postoji lopta $B(x_{i_0}, \frac{\delta(x_{i_0},\epsilon)}{2})$ (za neko $i_0 \in \{1, ..., m\}$) koja sadrži x. Sa druge strane, $d(x_{i_0}, y) \leq d(x_{i_0}, x) + d(x, y) < \delta(x_{i_0}, \epsilon)$, pa $y \in B(x_{i_0}, \delta(x_{i_0}, \epsilon))$ i zato je $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_{i_0})) + d(f(x_{i_0}), f(y)) < \epsilon$. □

1.10. Povezanost.

DEFINICIJA 1.140. Za skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je povezan ako ne može da se predstavi kao unija dva disjunktna neprazna otvorena skupa u indukovanoj topologiji skupa C, tj. skup C se ne može predstaviti na način

$$C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

gdje A, B su otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$, takvi da $A \cap B = \emptyset$ i $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$.

KOMENTAR 1.141. Opštija varijanta Definicije 1.140 odnosi se na topološki prostor (X, τ). Preciznije, topološki prostor X je povezan ako ne može da se predstavi kao unija dva neprazna disjunktna otvorena skupa u X, tj. $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$. Slično, ako je $C \subset X$, onda je skup C povezan ako je povezan u odnosu na indukovanu topologiju iz X.

Prije nego počnemo sa navođenjem primjera povezanih i nepovezanih skupova navešćemo jednu osobinu povezanih skupova koja direktno slijedi iz Definicije 1.140.

PROPOZICIJA 1.142. *Neka je C povezan skup u $\mathbb{R}^n$ i A je podskup skupa C koji je istovremeno otvoren i zatvoren skup u C. Tada je $A = \emptyset$ ili je $A = C$.*

DOKAZ. Kako je $C = A \cup (C \setminus A)$ predstavljen kao unija dva otvorena skupa u C, to zbog pretpostavljene povezanosti skupa C imamo da je $A = \emptyset$ ili $A = C$. □

PRIMJER 1.143. Skup $(a, b) \cup (b, d)$ je primjer nepovezanog skupa u $\mathbb{R}$, gdje $a, b, d \in \mathbb{R}$ pri čemu ne isključujemo i mogućnost da je $a = -\infty$ ili $d = \infty$.

Primjer 1.144. Ako je $A = \{(x, y, z)|1 < (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 < 2\}$, tada je skup graničnih tačaka $\partial A = S_1 \cup S_2$, gdje $S_1 = \{(x, y, z)|(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2\}$, $S_2 = \{(x, y, z)|(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2\}$ i jasno ∂A je nepovezan skup.

Primjer 1.145. Ako je $X \neq \emptyset$, i $(X, \tilde{d})$ metrički prostor sa diskretnom metrikom, onda je svaki podskup skupa X nepovezan što slijedi iz činjenice da za svaku tačku $x \in X$ skup $\{x\}$ je sam za sebe otvoren i istovremeno zatvoren skup.

Primjer 1.146. Jednočlan skup $\{x\}$ je povezan za proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$.

Primjer 1.147. (**Segment** $[a, b]$ **je povezan skup**) Segmenti $[a, b]$ realne prave $\mathbb{R}$ su povezani skupovi. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $[a, b] = A \cup B$, gdje su A i B neprazni, otvoreni i disjunktni skupovi u $[a, b]$. Neka je $b \in B$. Tada, budući otvoren u $[a, b]$, skup B zadrži i neku okolinu tačke b u $[a, b]$, što povlači da je $\sup(A) = c < b$. Napomenimo da supremum skupa A postoji jer je A ograničen skup. Dalje, tačka c pripada jednom od skupova A ili B što znači da neka okolina $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ tačke c pripada skupu A ili B. Međutim, kako je c supremum, dakle i tačka nagomilavanja skupa A, to $A \cap (c-\epsilon, c) \neq \emptyset$ i $(c, c+\epsilon) \cap B \neq \emptyset$. Kontradikcija. Time je dokazano da su svi segmenti $[a, b]$ realne prave povezani skupovi. Slično se pokazuje da su dodatno i svi polusegmenti $[a, b)$, $(a, b]$ i intervali (a, b) takođe povezani skupovi u $\mathbb{R}$.

Primjer 1.148. Prethodni primjer povlači da je i $\mathbb{R}$ takođe povezan skup. Zaista, pretpostavimo da je $\mathbb{R}$ nepovezan skup, tj. $\mathbb{R} = A \cup B$, gdje su A, B neprazni, disjunktni otvoreni skupovi. Tada iz $\mathbb{R} = \cup_{n \geq 1}[-n, n]$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $[-n_0, n_0] \cap A \neq \emptyset$ i $[-n_0, n_0] \cap B \neq \emptyset$ odnosno $[-n_0, n_0] = ([-n_0, n_0] \cap A) \cup ([-n_0, n_0] \cap B)$, što je kontradikcija. Slično, i neograničeni polusegmenti $(-\infty, b]$ i $[a, \infty)$ su primjeri povezanih skupova u $\mathbb{R}$.

Primjer 1.149. ($n-$**segment** $I_{a,b}$ **je povezan skup**) Ukoliko pretpostavimo da je $n-$segment $I_{a,b}$ nepovezan skup, tj. $I_{a,b} = A \cup B$, gdje su A, B neprazni, disjunktni i otvoreni skupovi u $I_{a,b}$, onda koristeći da su projekcije $p^i : I_{a,b} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$ neprekidna i otvorena preslikavnja imamo da je segment $[a_i, b_i] = p^i(A) \cup p^i(B)$ nepovezan skup. Kontradikcija. Dakle, $n-$segment $I_{a,b}$ je povezan skup što za posljedicu ima i da je $\mathbb{R}^n$ povezan skup.

Naredna propozicija daje karakterizaciju povezanih skupova u $\mathbb{R}$.

Propozicija 1.150. *Skup $A \subset \mathbb{R}$ je povezan ako i samo ako je A interval (zatvoren, otvoren ili poluotvoren).*

Dokaz. Neka je A neprazan povezan skup u $\mathbb{R}$ i $\alpha = \inf A$ i $\beta = \sup A$. Dokažimo da $a \in A$ za svako $a \in (\alpha, \beta)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da $a \notin A$. Skupovi $A \cap (-\infty, a)$ i $A \cap (a, \infty)$ su neprazni disjunktni i otvoreni skupovi u A i njihova unija je skup A, što je kontradikcja. Obratno tvrđenje je dokazano kroz primjere, Primjer 1.147 i Primjer 1.148. □

Kao što smo već vidjeli u Primjeru 1.143 unija dva povezana skupa ne mora da bude povezan skup. U sljedećoj propoziciji dajemo dovoljan uslov pod kojim je unija povezanih skupova povezan skup.

PROPOZICIJA 1.151. *Ako su $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in I$ povezani skupovi, pri čemu je $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, onda je $\cup_\alpha A_\alpha$ povezan skup.*

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup $\cup_\alpha A_\alpha$ nepovezan. Tada postoje otvoreni disjunktni i neprazni skupovi U i V takvi da $\cup_\alpha A_\alpha = U \cup V$, pri čemu je $(\cup_\alpha A_\alpha) \cap U \neq \emptyset$ i $(\cup_\alpha A_\alpha) \cap V \neq \emptyset$. Posljednje relacije povlače da $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \cap U \neq \emptyset$ ili $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \cap V \neq \emptyset$. Pretpostavimo bez umanjenja opštosti da $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \cap U \neq \emptyset$, što dalje povlači $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$ za svaki indeks $\alpha \in I$. Međutim, tada imamo da je $A_\alpha = (A_\alpha \cap U) \cup (A_\alpha \cap V)$, $\alpha \in I$, što budući da je A_α povezan skup je moguće samo za slučaj da je $A_\alpha \subseteq U$, $\alpha \in I$. Posljedično $V = \emptyset$ što je kontradikcija, tj. početna pretpostavka nije tačna. □

Naredna teorema je analog Teoreme 1.134 samo sada za povezane skupove, tj. pokazujemo da je svojstvo povezanosti topološka invarijanta.

TEOREMA 1.152. *Neka je $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ neprekidna funkcija i A je povezan skup. Tada je skup $f(A)$ povezan u $\mathbb{R}^m$.*

DOKAZ. Pretpostavimo da skup $f(A)$ nije povezan. Tada postoje neprazni otvoreni disjunktni skupovi V_1 i V_2 u $\mathbb{R}^m$ takvi da $f(A) \subseteq V_1 \cup V_2$ i $f(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ i $f(A) \cap V_2 \neq \emptyset$.

U nastavku primijetimo da ako $x \in A$, onda $f(x) \in V_1$ ili $f(x) \in V_2$, što povlači da $A \subseteq f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$. Sa druge strane, skupovi $U_1 = A \cap f^{-1}(V_1)$ i $U_2 = A \cap f^{-1}(V_2)$ su otvoreni u A zbog pretpostavljene neprekidnosti funkcije f. Takođe, skupovi U_1 i U_2 su disjunktni jer $U_1 \cap U_2 \subseteq f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$. Dalje, jasno da $A \subseteq U_1 \cup U_2$. Ako bi $A \cap U_1 = \emptyset$, onda $A \subseteq U_2$, što dalje povlači da je $f(A) \subseteq f(A \cap f^{-1}(V_2)) \subseteq f(A) \cap V_2$. Posljednja inkluzija protvriječi početnoj pretpostavci da je $f(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dakle, $A \cap U_1 \neq \emptyset$. Slično, pokazujemo da je $A \cap U_2 \neq \emptyset$. Prema tome, zaključujemo da skup A nije povezan. Kontradikcija. □

PRIMJER 1.153. Podsjetimo se da za $a, b \in \mathbb{R}^n$ segment $[a, b]$ u $\mathbb{R}^n$ je definisan na način

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda) b | 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Funkcija $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $\psi(\lambda) = \lambda a + (1 - \lambda) b$ je neprekidna što lako slijedi iz nejednakosti

$$\|\psi(s) - \psi(t)\| \leq \|a\| |s - t| + \|b\| |s - t|.$$

Dakle, segment $[a, b] = \psi([0, 1])$ je povezan skup kao slika segmenta $[0, 1]$ preslikavanjem ψ.

DEFINICIJA 1.154. (**Putevima povezan skup**) Za skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je putevima povezan ako za svake dvije tačke $x, y \in C$ postoji neprekidno preslikavanje (put) $\varphi : [0, 1] \to C$ tako da $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

DEFINICIJA 1.155. (**Linijski povezan skup**) Za skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je linijski povezan ako za svake dvije tačke $x, y \in A$ postoji poligonalna linija koja spaja tačke x i y.

KOMENTAR 1.156. Pod poligonalnom linijom koja spaja tačke x i y u A podrazumijevamo niz segmenata $[x_{k-1}, x_k] \subset C$, $k \in \{0, 1, ..., m\}$, gdje $x_0 = x$ i $x_m = y$.

KOMENTAR 1.157. Ako je skup linijski povezan onda je i putevima povezan.

PRIMJER 1.158. Jedinična kružnica S^1 je putevima povezan skup. Na primjer, ako su $A, B \in S^1$ (slika), tada polazeći od parametrizacije jedinične kružnice $S^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) | t \in [0, 2\pi)\}$ i određujući tačke A i B na način da ugao koji odgovara tački A je α i β je ugao koji odgovara tački B, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$. Odgovarajući put $\varphi : [0, 1] \to S^1$ koji spaja tačke A i B dat je sa $\varphi(t) = (\cos(t\beta + (1-t)\alpha), \sin(t\beta + (1-t)\alpha))$. Sa druge strane, S^1 nije linijski povezan skup.

Prirodno se nameće pitanje kakav je odnos između povezanosti i povezanosti putevima. Naredna teorema daje djelimičan odgovor.

TEOREMA 1.159. *Ako je skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ putevima povezan, onda je i povezan.*

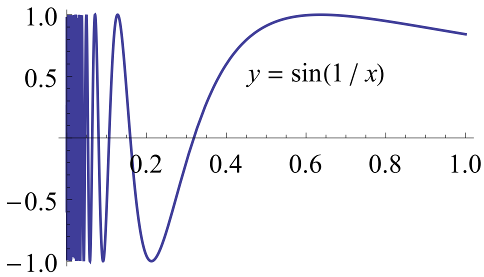
DOKAZ. Pretpostavimo da je C povezan putevima, a da nije povezan skup. Tada postoje neprazni otvoreni skupovi A i B u skupu C takvi da je $C = A \cup B$. Neka su sada $x \in A$ i $y \in B$. Po pretpostavci postoji put $\varphi : [0, 1] \to C$ tako da $\varphi(0) = x$ i $\varphi(1) = y$. Grafik funkcije φ, u oznaci $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) | 0 \leq x \leq 1\}$, je povezan skup kao slika segmenta $[0, 1]$ neprekidnim preslikavanjem $\psi(x) = (x, \varphi(x))$. Međutim,

$$\Gamma_\varphi = (A \cap \Gamma_\varphi) \cup (B \cap \Gamma_\varphi),$$

gdje su $A \cap \Gamma_\varphi$ i $B \cap \Gamma_\varphi$ otvoreni, neprazni i disjunktni skupovi u indukovanoj topologiji na Γ_φ, tj. Γ_φ je nepovezan skup. Kontradikcija. $\square$

PRIMJER 1.160. Obrnuto tvrđenje u Teoremi 1.159 nije tačno u opštem. Kao odgovarajući primjer navodimo skup $C = A \cup B$, gdje je $A = \{(x, 0) | x \leq 0\}$ i $B = \{(x, \sin\frac{1}{x}) | x > 0\}$. Skup C je povezan. U suprotnom, $C = (H \cap C) \cup (K \cap C)$, gdje su H i K neprazni, disjunktni i otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^2$. Kako je A povezan on ne može da siječe H i

K istovremeno, već je sadržan u jednom od njih, na primjer u H. Isti argument se može primijeniti na B i zaključiti da onda $B \subset K$. Sa druge strane, imamo da je $(0,0) \in H$ i zato postoji $\epsilon > 0$ tako da $B(0,\epsilon) \subset H$. Tačka $(0,0)$ je tačka nagomilavnja za skup B, pa $B(0,\epsilon) \cap B \neq \emptyset$, tj. $H \cap K \neq \emptyset$, a to je kontradikcija. Međutim, C nije putevima povezan. Na primjer ako je proizvoljnu tačku iz A i proizvoljnu tački iz B moguće spojiti putem, onda bi to značilo da postoji $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$, što nije tačno.



Primjer 1.161. Otvorena jedinična lopta $B(0,1)$ je putevima pove–zan skup. Zaista, pretpostavimo da su $x, y \in B(0,1)$. Tada put koji spaja tačke x i y dat je sa $\psi(t) = ty + (1-t)x$, $0 \leq t \leq 1$. Da je preslikavanje ψ neprekidno dokazali smo u Primjeru 1.153, a da važi $\psi([0,1]) \subset B(0,1)$ slijedi jednostavno koristeći nejednakost trougla za euklidsku normu

$$\|\psi(t)\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < 1 - t + t = 1.$$

Primjer 1.162. Iz prethodnog primjera direktno slijedi da je svaki konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ putevima povezan.

Primjer 1.163. Jedinična sfera S^{n-1} u $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ je putevima povezan skup.

Primjer 1.164. Loptu $B(a,r)$ u $\mathbb{R}^3$ možemo da posmatramo kao sliku jedinične lopte preslikavanjem $f(x) = a + rx$. Preciznije, $B(a,r) = f(B(0,1))$, gdje je $f(x_1,x_2,x_3) = (a_1 + rx_1, a_2 + rx_2, a_3 + rx_3)$. Kako je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ neprekidno preslikavanje to je i $B(a,r)$ povezan skup na osnovu Teoreme 1.152.

Primjer 1.165. Neka je $E = \{(x,y,z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$. Geometrijski je jasno da svake dvije tačke iz E možemo da povežemo segmentom u E, te da je skup putevima povezan. U ovom primjeru, pokažimo da je skup E povezan koristeći Teoremu 1.152.

Uzimajući u obzir preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisano sa $f(x,y,z) = (ax, by, cz)$ koje je očigledno neprekidno, nije teško provjeriti da je $f(B(0,1)) = E$, pa na osnovu Teoreme 1.152 skup E je povezan.

Definicija 1.166. (**Oblast**) Skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ koji je otvoren i povezan naziva se oblast.

Naredna teorema daje odgovor na pitanje koji dodatni uslov treba da zadovoljava povezan skup da bi bio putevima povezan.

Teorema 1.167. *Neprazan i otvoren skup Ω u $\mathbb{R}^n$ je povezan ako i samo ako se svake dvije njegove tačke mogu povezati poligonalnom linijom.*

Dokaz. Ukoliko je Ω linijski povezan, onda je Ω i putevima povezan, pa prema tome i povezan. Obratno, ako je Ω otvoren i povezan neka je $x_0 \in \Omega$ i $A = \{x \in \Omega | x \text{ je moguće spojiti poligonalnom linijom sa } x_0\}$. Kako $x_0 \in A$, to $A \neq \emptyset$. Budući da je Ω otvoren skup, to za svako $x \in A$ postoji $r_x > 0$ i lopta $B(x, r_x) \subset \Omega$. Dalje je jasno da $B(x, r_x) \subset A$ jer svaku tačku $y \in B(x, r)$ moguće je spojiti segmentom $[x, y]$ sa tačkom x i posle poligonalnom linijom opet sa x_0. Dakle, A je otvoren skup. Sa druge strane, skup $B = \Omega \setminus A$ možemo da okarakterišemo kao skup svih tačaka iz Ω koje nije moguće poligonalnom linijom spojiti sa x_0. Skup B je takođe otvoren. Naime, za $z \in B$ postoji $r_z > 0$ tako da $B(z, r_z) \subset \Omega$. Svaka tačka $\tilde{z} \in B(z, r_z)$ pripada B. U protivnom tačku $\tilde{z}$ bi mogli da povežemo sa x_0 poligonalnom linijom i segmentom $[\tilde{z}, z]$ sa tačkom z, što je nemoguće. U konačnom zaključujemo da je A istovremeno zatvoren i otvoren skup u Ω, što na osnovu Propozicije 1.142 povlači da je $A = \Omega$. □

1.11. Komponente povezanosti. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ukoliko skup A nije povezan za pretpostaviti je da se skup A sastoji od povezanih disjunktnih podskupova. U cilju da dokažemo prethodnu pretpostavku definisaćemo na skupu A relaciju $\sim$. Za tačke $a, b \in A$ kažemo da su u relaciji $\sim$, $a \sim b$, ako postoji povezan podskup u A koji ih sadrži. Nije teško utvrditi da je $\sim$ relacije ekvivalencije na skupu A. Naime, za svaku tačku $x \in A$ važi $x \sim x$ jer je $\{x\}$ povezan skup. Simetričnost relacije $\sim$, $x \sim y$ ako i samo ako je $y \sim x$, je očigledna. Dalje, ako je $x \sim y$ i $y \sim z$, to postoje povezani podskupovi od A, recimo A_y i A_z, takvi da $x, y \in A_y$ i $y, z \in A_z$. Kako je $A_y \cap A_z \neq \emptyset$, to na osnovu Propozicije 1.151 $A_y \cup A_z$ je povezan skup i $x, z \in A_y \cup A_z$, tj. $x \sim z$. Klase ekvivalencije relacije $\sim$ na A nazivaju se komponentama povezanosti skupa A. Tako za proizvoljno $x \in A$ komponenta povezanosti C_x koja sadrži x predstavlja najveći povezan podskup u A koji sadrži x.

Zadaci

1. Ako je $(X, \tilde{d})$ metrički prostor, pokazati da je $(X, \tilde{d})$ takođe metrički prostor, gdje je $\tilde{d}_1(x, y) = \frac{\tilde{d}(x,y)}{1+\tilde{d}(x,y)}$, $x, y \in X$ i da je svaki podskup u X ograničen u novoj metrici.
2. Neka je $B([a, b])$ skup svih ograničnih funkcija na segmentu $[a, b]$. Dokazati da je $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$, $f \in B([a, b])$ norma na $B([a, b])$ i $(B([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Da li je $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ norma na $B([a, b])$?
3. Ispitati da li je sa:
a)$\tilde{d}(x, y) = \arctan |x - y|$;

b)$\tilde{d}(x,y) = \sqrt{|x-y|}$;
c)$\tilde{d}(x,y) = \sin^2|x-y|$, zadata metrika na $\mathbb{R}$.
4.Neka je $(X,\tilde{d})$ metrički prostor i $A \subset X$. Dokazati da je $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.
5. Dokazati da je skup ograničenih linearnih preslikavanja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normiran prostor.
6. Ocijeniti normu linearnog preslikavanja $\Lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\Lambda(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, 3x_2, 3x_1)$$

uzimajući u obzir:
a) euklidsku normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^3$,
b) normu $\|\cdot\|_1$ na $\mathbb{R}^3$,
c) normu $\|\cdot\|_\infty$ na $\mathbb{R}^3$.
7. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ograničeno linerano preslikavanje. Pokazati da je sa $B(x,y) = \langle Ax, y \rangle$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ definisano ograničeno bilinearno preslikavanje i da je $\|B\| \leq \|A\|$.
8. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3$ i $B(x,y) = x \times y$ (vektorski proizvod). Dokazati da je B bilinearno preslikavanje i odrediti mu normu.
9. Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$, dokazati da je:
a) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$;
b)$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
c) $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
10. Neka je $f \in C([a,b])$. Dokazati da je grafik funkcije f, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | a \leq x \leq b\}$, zatvoren skup u euklidskoj ravni.
11. Dokazati da su skupovi $A = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y = \frac{x^2}{x^2+1}\}$ i $B = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y = 1\}$ disjunktni zatvoreni skupovi i da je $\mathrm{d}(A,B) = 0$.
12. Dokazati Teoremu 1.60.
13. Dokazati Teoremu 1.63.
17. Neka su $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$. Tada:
a) ako je $f(x) = g(x)$, $x \in Q^n$ pokazati da je $f(x) = g(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$.
b) dokazati da je skup $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = g(x)\}$ zatvoren.
18. Odrediti A^0, $\mathrm{Ext}(A)$ i ∂A, ako je:
a) $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$;
b)$A = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i$ je racionalan$\}$;

19. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ neprekidno preslikavanje. Pokazati da ako je $A \subset \mathbb{R}^n$, onda važi $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
20. Ispitati neprekidnost funkcije na $A = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 < \frac{\pi}{2}\}$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \tan(x^2+y^2)\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \in A \setminus (0,0,0), \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Odrediti $f(A)$.
21. Dokazati Teoremu 1.15.
22. Koristeći Banahov princip kontrakcije dokazati da sljedeći sistem ima jedinstveno rješenje. Formirati iterativni niz koji aproksimira rješenje sistema

$$\begin{aligned} 1.1x_1 + 0.22x_2 - 0.03x_3 &= 0.5 \\ 0.8x_2 + 0.25x_3 &= 1 \\ 0.11x_1 + 0.19x_2 + 0.9x_3 &= 2. \end{aligned}$$

23. Koristeći Banahov princip kontrakcije pokazati da jednačina $e^{-x} - x + 1 = 0$ imja rješenje na $\mathbb{R}$. Odrediti približno rješenje sa greškom 10^{-2}.
24. Ako je $\{K_i\}_{i\in\mathbb{R}^n}$ opadajuća familija kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^n$ $(K_1 \supset K_2 \supset K_3 \cdots)$, dokazati da $\cap_{i=1}^{\infty} K_i$ nije prazan.
25.Dokazati da je skup $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan ako i samo ako svaki niza tačaka $\{x_k\}_{k\geq 1}$ iz K ima podniz koji konvergira ka nekoj tački $x \in K$.
26. Ako su $F, K \subset \mathbb{R}^n$, takvi da je $F-$zatvoren, a $K-$kompaktan skup i $F \cap K = \emptyset$, dokazati da je tada $\mathrm{d}(F, K) > 0$. Pokazati da tvrđenje nije tačno ako se izostavi uslov da je K kompaktan.
27. Ako su K_1 i K_2 kompaktni disjunktni skupovi u $\mathbb{R}^n$ dokazati da postoje otvoreni disjunktni skupovi G i H u $\mathbb{R}^n$ takvi da $K_1 \subset G$ i $K_2 \subset H$.
28. Pokazati da ako je $K \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup, onda za svaki niz $\{x_k\}_{k\geq 1} \subset K$ postoji podniz koji konvergira ka nekoj tački iz $\overline{K}$.
29. Da li presjek povezanih skupova u $\mathbb{R}^3$ mora da bude povezan skup? Da li slika nepovezanog skupa pri neprekidnom preslikavanju mora da bude nepovezan skup?
30. Dokazati da je S^2 putevima povezan skup.
31. U terminima otvoren, zatvoren povezan, putevima povezan, kompletan, kompaktan opisati sljedeće skupove:
a)$A = \{(x, y) | x^2 - y^2 \geq 4\}$;
b)$A = \{(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \frac{\log(1+n)}{n}, 1 + e^{-n^2}) | n \in \mathbb{N}\}$;
c)$A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 4, x + y + z > 1\}$.
32. Pokazati da ne postoji homeomorfizam između $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
33. Odrediti komponenete povezanosti sa sljedeće skupove:
a)∂A ako je $A = \{x \in \mathbb{R}^n | 1 < \|x\| < 2\}$;
b) skup racionalnih brojeva Q u $\mathbb{R}$.
34.Pokazati da je skup $B = \{(x, \sin\frac{1}{x}) | x > 0\}$ putevima povezan, ali da $\overline{B}$ nije putevima povezan.

Bibliography

[1] V.I. Gavrilov, Ž. Pavićević, *Matematička analiza 1*, Prirodno-matematički fakultet, Podgorica, 1994.

[2] M. Jevtić, M. Mateljević, I. Jovanović , *Matematička analiza II.* Matematički fakultet, Beograd, 2008